1. Множества. Операции с множества

Интуитивно, множеството представлява съвкупност от обекти. Обектите на едно множество се наричат негови елементи и се казва, че принадлежат на множеството. Обикновено множествата се бележат с главни латински букви, а елементите им - с малки латински букви. Например, числото 1 е елемент на множеството на естествените числа (естествени числа - това са числата, с които броим - $1, 2, 3, \cdots$; множеството на естествените числа се означава $\mathbb{N}$). Следователно $1 \in \mathbb{N}$, което еквивалентно може да се запише като $\mathbb{N} \ni 1$. Числото 0.5 не е елемент на множеството на естествените числа - пишем $0.5 \notin \mathbb{N}$. Друг хубав пример е - "Мария принадлежи на множеството на всички женски имена ".

Горната дефиниция не е напълно коректна, защото използва понятието съвкупност, без да го дефинира. Всеки опит за точно дефиниране на съвкупност би довел до кръгова дефиниция. Поради това в математиката понятието множество се приема за първично и не се дефинира строго.
Множествата в математиката се задават по няколко начина:

1. чрез изброяване на всички елементи множеството, например
   $A = \{1, 2, 3\}$.

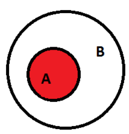
2. чрез условие, което удовлетворяват всички елементи на множеството, например
   $A = \{x \in \mathbb{N} | x = 2k, k \in \mathbb{N}\}$, където знакът '|' се чете 'при условие, че'.

3. чрез изброяване на първите няколко елемента, например
   $Alphabet = \{a, b, c, d, ...\}$. Надявам се, че сте забелязали, че множеството е латинската азбука.

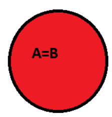
Елементите на множествата са неповтарящи се. Нека да разгледаме множеството $D = \{a, a, a, b, b, c\}$, то се състои от елементите a, b, c. Следователно $D = \{a, b, c\}$ понеже в множествата няма значение колко пъти се появява даден елемент. Също така при множествата няма значение наредбата следователно $D = \{c, b, a\}$

Множеството A се нарича подмножество на множеството B, когато всеки елемент на A е и елемент и на B. Сега ще го напишем с математически означения:

Определение: Ако $\forall x \in A \Rightarrow x \in B$, то казваме че A е подмножество на B и бележим $A \subseteq B$.

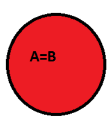


или

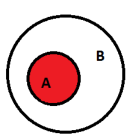


Множеството, което няма нито един елемент, се нарича празното множество. Бележим го с $\emptyset$. Приема се, че празното множество е подмножество на всяко множество.

Определение: Казваме, че множествата A и B са еквивалентни (или още съвпадат), когато двете множества се състоят от едни и същи елементи. Бележим с $A = B$.



Определение: Казваме, че A е собствено подмножество на B, ако $A \neq B$. Бележи се $A \subset B$.



Определение: Казваме, че A е съществено подмножество на B, ако A не е празното множество и $A \neq B$.

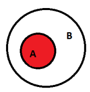
Наричаме A съществено, защото ние знаем, че $\emptyset \subseteq B$ и $B \subseteq B$, каквото и множество B да изберем. Също така казваме, че $\emptyset$ и B са тривиални подмножества на B.

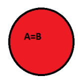
Сега ще докажем следната интуитивна теорема:

Теорема: $A \subseteq B$ и $B \subseteq A \Longleftrightarrow A = B$.

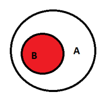
Доказателство:

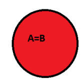
Преди да докажем теоремата да си представим как ще изглежда ситуацията нагледно.

Понеже $A \subseteq B$, то 

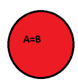
или 

.

Понеже $B \subseteq A$, то е изпълнено едновременно и 

или 

.

Следователно е изпълнено 

.

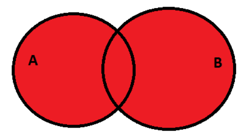
Идеята на последните няколко реда е да се покаже на интуитивно ниво, че теоремата е изпълнена теоремата, а сега ще я докажем.

Първо ще докажем правата посока, т.е. от $A \subseteq B$ и $B \subseteq A \Longrightarrow A = B$. Да допуснем противното, т.е. $A \subseteq B$ и $B \subseteq A \Longrightarrow A \neq B$ следователно без ограничение на общността можем да приемем, че съществува x: $x \in A, x \notin B$ (Може би се чудите, защо разглеждаме само случая “съществува x, такова че $x \in A, x \notin B$ ”, а не “съществува x, такова че $x \notin A, x \in B$ ”. Отговорът е - понеже двата случая се правят по абсолютно един и същ начин, за да обозначим, че ще направим само единия случай пишем без ограничение на общността и си спестяваме малко работа). Но тъй като $A \subseteq B$, следователно ако $x \in A$, то $x \in B$ и тук достигаме до противоречие с допускането. С това доказахме първата част.

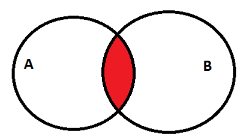
Сега да докажем обратната посока, т.е. ако $A = B$, то $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$. Понеже $A = B$, то ако $x \in A \Longrightarrow x \in B$. Но това показва, че A е подмножество на B или $A \subseteq B$. Аналогично $B \subseteq A$. ■

Операции с множества. Ще разгледаме операциите обединение, сечение, разлика и симетрична разлика на множества. Те са операции, които ще взимат две множества и връщат множество.

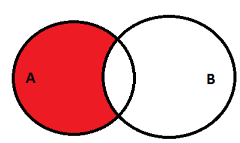
Ще започнем с един общ за всички операции пример. Нека да разгледаме множествата $A = \{1, 2, 3...\}$, $B = \{1, 3, 5...\}$, $C = \{2, 4, 6...\}$.



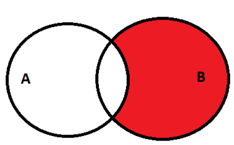
Обединение (събиране) на множества. Обединение на 2 множества A и B наричаме такова множество C, което се състои от елементите на множеството A или множеството B. Много важно е да не забравяме, че не трябва да оставяме повтарящи се елементи, т.е. ако нещо се среща и в двете множества, го пишем веднъж.
Съкратено се записва като $A \cup B = \{x | x \in A$ или $x \in B\}$.
За примера: $A \cup B = A$, $A \cup C = A$, $B \cup C = A$.



Сечение на множества. Сечение на 2 множества A и B наричаме такова множество C, което се състои от елементите принадлежащи едновременно на множеството A и множеството B.
Съкратено се записва като $A \cap B = \{x | x \in A$ и $x \in B\}$.
За примера: $A \cap B = B, A \cap C = C, B \cap C = \emptyset$.

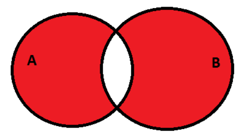


Разлика на множества. Разлика на множеството A с множеството B наричаме такова множество C, което съдържа всички елементи от A, които в същото време не са елементи от B.
Съкратено се записва като $A \setminus B = \{x | x \in A$ и $x \notin B\}$.
Аналогично $B \setminus A = \{x | x \notin A$ и $x \in B\}$.



За примера:

$A \setminus B = C, A \setminus C = B,$
$B \setminus A = \emptyset, B \setminus C = B,$
$C \setminus A = \emptyset, C \setminus B = C.$



Симетрична разлика на множества. Симетричната разлика на множеството A с множеството B наричаме такова множество C, което съдържа всички елементи от A, които в същото време не са елементи от B, и едновременно всички елементи от B, които в същото време не се елементи от A. Съкратено се записва като $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.
За примера:
$A \triangle B = C,$
$A \triangle C = B,$
$B \triangle C = A.$

Свойства:

1. $A \cup B = B \cup A;$
2. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C);$
3. $A \cup \emptyset = A;$
4. $A \cup A = A;$
5. $A \cap B = B \cap A;$
6. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C);$
7. $A \cap \emptyset = \emptyset;$
8. $A \cap A = A;$
9. $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C);$
10. $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C);$
11. $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C);$
12. $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C).$

Тези свойства се доказват по един и същ начин. Взимаме x, което да удовлетворява дясната страна, и доказваме, че удовлетворява и лявата страна и обратно взимаме x, удовлетворяващо лявата страна и доказваме, че удовлетворява и дясната страна. Съветвам да се опитате да докажете някои от свойствата сами. По-долу са доказателствата на 1, 2, 9 и 11.

1. $A \cup B = B \cup A$;

   Доказателство:

   (а) Нека $x \in A \cup B$. Тогава $x \in A$ или $x \in B$. Следователно $x \in B$ или $x \in A$, т.е. $x \in B \cup A$. Получихме, че $A \cup B \subseteq B \cup A$.

   (б) Нека $x \in B \cup A$. Тогава $x \in B$ или $x \in A$. Следователно $x \in A$ или $x \in B$, т.е. $x \in A \cup B$. Получихме, че $B \cup A \subseteq A \cup B$. И от теоремата следва, че $A \cup B = B \cup A$. $\blacksquare$

2. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$;

   Доказателство:

   (а) Нека $x \in (A \cup B) \cup C$. Тогава ($x \in A$ или $x \in B$) или $x \in C$. Следователно $x \in A$ или ($x \in B$ или $x \in C$), т.е. $x \in A$ или $x \in B \cup C$. Следователно $x \in A \cup (B \cup C)$. Така получихме, че $(A \cup B) \cup C \subseteq A \cup (B \cup C)$.

   (б) Нека $x \in A \cup (B \cup C)$. Тогава $x \in A$ или ($x \in B$ или $x \in C$). Следователно ($x \in A$ или $x \in B$) или $x \in C$, т.е. $x \in A$ или $x \in B \cup C$. Така получихме, че $A \cup (B \cup C) \subseteq (A \cup B) \cup C$. От теоремата получаваме, че $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$. $\blacksquare$

3. $A \cup \emptyset = A$ - очевидно.

4. $A \cup A = A$ - очевидно.

5. $A \cap B = B \cap A$ - аналогично на 1.

6. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ - аналогично на 2.

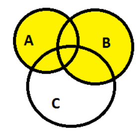
7. $A \cap \emptyset = \emptyset$ - очевидно.

8. $A \cap A = A$ - очевидно.

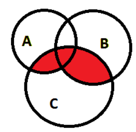
9. $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

Доказателство:

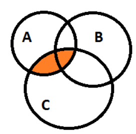
Преди самото доказателство, да видим дали интуитивно ниво изглежда вярно. Нека да разгледаме A, B и C, такива че $A \cap B \cap C \neq \emptyset, A \cap B \neq \emptyset, A \cap C \neq \emptyset$ и $C \cap B \neq \emptyset$.



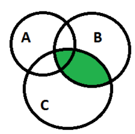
Тогава множеството $A \cup B$ е оцветено в жълт цвят:



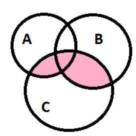
Множеството $(A \cup B) \cap C$ е в червено.
Разгледахме лявата страна, а сега ще разгледаме дясната. Множес-



твото $(A \cap C)$ е обозначено в оранжево.



Множеството $(B \cap C)$ е зелено.



Множеството $(A \cap C) \cup (B \cap C)$ е розово.
Получихме едно и също за двете страни. А сега да минем към доказателството на свойството.

(а) Нека $x \in (A \cup B) \cap C$. Тогава ($x \in A$ или $x \in B$) и едновременно $x \in C$. Следователно ($x \in A$ и едновременно $x \in C$) или ($x \in B$ и едновременно $x \in C$), т.е. $x \in A \cap C$ или $x \in B \cap C$. Следователно $x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$. Така получихме, че $(A \cup B) \cap C \subseteq (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

(б) Нека $x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$. Тогава ($x \in A$ и едновременно $x \in C$) или ($x \in B$ и едновременно $x \in C$). Следователно ($x \in A$ или

$x \in B$) и едновременно $x \in C$, т.е. $x \in A \cup B$ и едновременно $x \in C$. Така получихме, че $(A \cap C) \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap C$. От теоремата получаваме, че $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$. $\blacksquare$

10. $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ - аналогично на 9.

11. $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

    Доказателство:

    (а) Нека $x \in A \setminus (B \cap C)$. Тогава $x \in A$, но ($x \notin (B \cap C)$. Следователно $x \in A$, но ($x \notin B \cup x \notin C$). Тогава излиза, че ($x \in A$ и $x \notin B$) или ($x \in A$ и $x \notin C$), т.е. $x \in A \setminus B$ или $x \in A \setminus C$. Следователно $x \in (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$. Така получихме, че $A \setminus (B \cap C) \subseteq (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

    (б) Нека $(A \setminus B) \cup (A \setminus C)$. Тогава ($x \in A$ и едновременно $x \notin B$) или ($x \in A$ и едновременно $x \notin C$). Следователно $x \in A$ и едновременно ($x \notin B$ или $x \notin C$), т.е. $x \in A$ и едновременно $x \notin (B \cap C)$. Така получихме, че $(A \setminus B) \cup (A \setminus C) \subseteq A \setminus (B \cap C)$. От теоремата получаваме, че $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.$\blacksquare$

12. $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$ - аналогично на 11.