Приложение на производните

Галина Люцканова

2 декември 2013 г.

1. Доказване на тъждества

Задача 17.1: Докажете тъждеството

$$f(x) = 2\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg}\frac{2x}{1-x^2} = \begin{cases} 0, \text{ при } x \in (-1,1) \\ \pi, \text{ при } x > 1 \\ -\pi, \text{ при } x < -1 \end{cases}$$

Доказателство: е $f(x)$ е непрекъсната за за всяко $x \in (-\infty, -1) \cup (-1,1) \cup (1,+\infty)$.

Сега ще пресметнем границите:

$$\lim_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} 2\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg}\frac{2x}{1-x^2} = 2\lim_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} \operatorname{arctg} x - \lim_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} \operatorname{arctg}\frac{\overbrace{2x}^{<0}}{\underbrace{(1-x)}_{>0}\underbrace{(1+x)}_{<0}} =$$

$$= 2\left(-\frac{\pi}{4}\right) - \frac{\pi}{2} = -\pi$$

$$\lim_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} 2\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg}\frac{2x}{1-x^2} = 2\lim_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} \operatorname{arctg} x - \lim_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} \operatorname{arctg}\frac{\overbrace{2x}^{<0}}{\underbrace{(1-x)}_{>0}\underbrace{(1+x)}_{>0}} =$$

$$= 2\left(-\frac{\pi}{4}\right) - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} 2\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg}\frac{2x}{1-x^2} = 2\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \operatorname{arctg} x - \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \operatorname{arctg}\frac{\overbrace{2x}^{>0}}{\underbrace{(1-x)}_{>0}\underbrace{(1+x)}_{>0}} =$$

$$= 2\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} = 0$$

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} 2\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg}\frac{2x}{1-x^2} = 2\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \operatorname{arctg} x - \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \operatorname{arctg}\frac{\overbrace{2x}^{>0}}{\underbrace{(1-x)}_{<0}\underbrace{(1+x)}_{>0}} =$$

$$= 2\frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$$

Намираме производната на $f(x)$:

$$f'(x) = (2\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg}\frac{2x}{1-x^2})' = 2(\operatorname{arctg} x)' - \left(\operatorname{arctg}\frac{2x}{1-x^2}\right)' =$$

$$= 2\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+(\frac{2x}{1-x^2})^2}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)' =$$

$$= \frac{2}{1+x^2} - \frac{(1-x^2)^2}{(1-x^2)^2+4x^2}\frac{(2x)'(1-x^2)-2x(1-x^2)'}{(1-x^2)^2} =$$

$$= \frac{2}{1+x^2} - \frac{2(1-x^2)-2x(-2x)}{(1-x^2)^2+4x^2} = \frac{2}{1+x^2} - \frac{2+2x^2}{(1+x^2)^2} =$$

$$= \frac{2}{1+x^2} - \frac{2(1+x^2)}{(1+x^2)^2} = \frac{2}{1+x^2} - \frac{2}{1+x^2} = 0$$

И така получихме, че $f(x) = const$. Понеже $f(x)$ е непрекъсната за всяко $x \in (-\infty,-1)$, $f(x)$ е константа и $\lim_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} f(x) = -\pi$, то $f(x) = -\pi$ за всяко $x \in (-\infty,-1)$. Аналогично е непрекъсната за всяко $x \in (-1,1)$, $f(x)$ е константа и $\lim_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} f(x) = 0$, то $f(x) = 0$ за всяко $x \in (-1,1)$. Също така $f(x) = \pi$ за всяко $x \in (1,+\infty)$.

2. Локални екстремуми Преди да започнем със задачите да припомним част от теорията:

Определение 17.1: Казваме, че $f(x)$ има локален максимум в някоя вътрешна точка x_0 от своята дефиниционна област, ако съществува околност $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ на точката x_0(съдържаща се в дефиниционната област), такава че за всички x_0 в тази околност е изпълнено $f(x) \leq f(x_0)$.

Определение 17.2: Казваме, че $f(x)$ има локален минимум в някоя вътрешна точка x_0 от своята дефиниционна област, ако съществува околност $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ на точката x_0(съдържаща се в дефиниционната област), такава че за всички x_0 в тази околност е изпълнено $f(x) \geq f(x_0)$.

Определенията показват, че локален екстремум в край на отворен интервал, не може да има.

Теорема 17.1: Нека $f(x)$ е диференцируема в точка x_0 и има локален екстремум в точката x_0. Тогава $f'(x_0) = 0$.

Теорема 17.2: Нека $f(x)$ е 2 пъти диференцируема в околност на точката x_0. Ако $f'(x_0) = 0$, а $f''(x_0) \neq 0$, то $f(x)$ има локален екстремум и

(а) той е локален минимум, ако $f''(x_0) > 0$

(б) той е локален максимум, ако $f''(x_0) < 0$

Теорема 17.3: Нека $f(x)$ е n пъти диференцируема в околност на точката x_0. Ако $f'(x_0) = f''(x_0) = ... = f^{(n-1)} = 0$, а $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Тогава:

(а) Ако n е четно, то $f(x)$ има локален екстремум в точката x_0 и

  i. той е локален минимум, ако $f^{(n)}(x_0) > 0$

  ii. той е локален максимум, ако $f^{(n)}(x_0) < 0$

(б) n е нечетно, то f(x) няма локални екстремуми в точката x_0

Задача 17.2: Намерете локалните екстремуми на функциите:

(а) $f(x) = x^3$

(б) $f(x) = x^4$

Решение:

(а) Нека точката x_0 е точка на локален екстремум. Тогава от теорема 1 имаме, че $f'(x_0) = 3{x_0}^2 = 0$ и така получаваме, че единственият кандидат за точка на локален екстремум е $x_0 = 0$. За да проверим дали x_0 е точка на локален екстремум и ако е, то дали е точка на локален минимум или на локален максимум, ще използваме теорема 3. За целта пресмятаме $f''(x) = 6x$ следователно $f''(x_0) = 0$. Продължаваме нататък с $f'''(x) = 6.$, т.е. $f'''(x_0) = 6$. Понеже 3 е нечетно, то $f(x)$ няма нито локален минимум, нито локален максимум в точката 0.

(б) $f(x) = x^4$. Нека точката x_0 е точка на локален екстремум. Тогава от теорема 1 имаме, че $f'(x_0) = 4{x_0}^3 = 0$ така отново получаваме, че единственият кандидат за точка на локален екстремум е $x_0 = 0$. За да проверим дали x_0 е наистина точка на локален екстремум, ще използваме отново теорема 3. За целта пресмятаме:

$$\begin{aligned} f''(x) &= 12x^2 & \quad f''(x_0) &= 12{x_0}^2 = 12 \cdot 0 = 0 \\ f^{(3)}(x) &= 24x & \quad f^{(3)}(x_0) &= 24x_0 = 24 \cdot 0 = 0 \\ f^{(4)}(x) &= 24 & \quad f^{(4)}(x_0) &= 24 \end{aligned}$$

Понеже 4 е четно, то $f(x)$ има локален екстремум в точката 0. Тъй като $f^{(4)}(0) = 24 > 0$, то в тази точка имаме локален минимум.

Както забелязахме намирането на локалните екстремуми по този начин, може да е доста трудоемка задача. Например $f(x) = x^{123}$. Затова ще се запознаем с друг метод за определяне на локалните екстремуми, а именно ще определим интервалите на растене и намаляване. За да илюстрирам метода първо ще напомня някои твърдения:

Твърдение 17.1: Нека $f'(x) > 0$ за всяко x в интервал $\triangle$. Тогава $f(x)$ е строго растяща в $\triangle$.

Твърдение 17.2: Нека $f'(x) < 0$ за всяко x в интервал $\triangle$. Тогава $f(x)$ е строго намаляваща в $\triangle$.
Сега ще илюстрирам метода върху една задача:

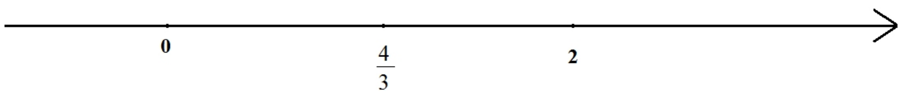
Задача 17.3: Намерете локалните екстремуми на функцията:

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2(2-x)}$$

Решение:
Евентуални точки на локален екстремум са тези, в които първата производна е 0 или не съществува. Намираме първата производна на функцията $f(x) = \sqrt[3]{x^2(2-x)} = \sqrt[3]{2x^2 - x^3}$:

$$f'(x) = \left((2x^2 - x^3)^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3}(2x^2 - x^3)^{-\frac{2}{3}}(2x^2 - x^3)' = \frac{4x - 3x^2}{3(2x^2 - x^3)^{\frac{2}{3}}} =$$
$$= \frac{x(4-3x)}{3(x^2(2-x))^{\frac{2}{3}}} = \frac{x(4-3x)}{3(x^{\frac{3}{2}}x^{\frac{1}{2}}(2-x))^{\frac{2}{3}}} = \frac{x(4-3x)}{3x(x^{\frac{1}{2}}(2-x))^{\frac{2}{3}}} =$$
$$= \frac{4-3x}{3x^{\frac{1}{3}}(2-x)^{\frac{2}{3}}}$$

И така получаваме, че евентуални локални екструми са $x_1 = \frac{4}{3}$ ($f'(x_1) = 0$), $x_2 = 0$ и $x_3 = 2$ ($f'(x)$ не е дефинирана за $x_2 = 0$ и $x_3 = 2$, защото знаменателят на $f'(x)$ е 0). Сега нанасяме евентуалните локални екстремуми на числова ос и проверяваме дали всеки от получените интервали е интервал на растене или на намаляване с последно написаните твърдения.



Взимаме по една точка от всеки интервал и проверяваме дали получаваме положително ли отрицателно число. В случая:

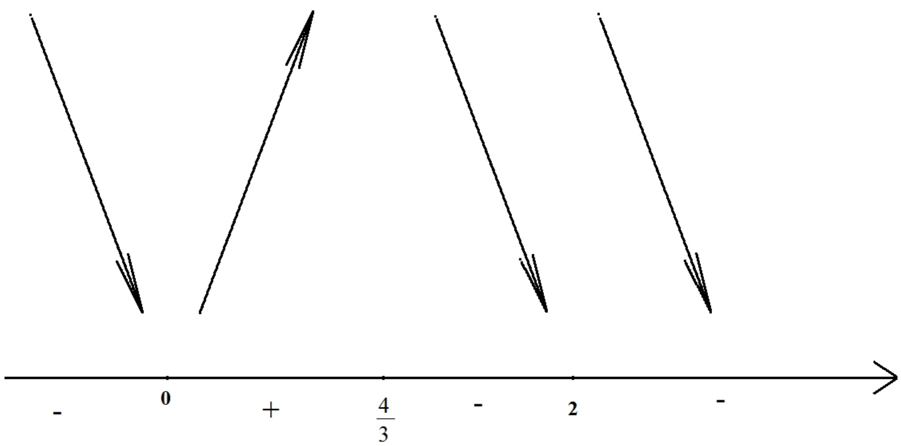
(а) $-1 \in (-\infty, 0)$ и $f'(-1) = \dfrac{\overbrace{4 - 3(-1)}^{>0}}{\underbrace{3(-1)^{\frac{1}{3}}}_{<0}\underbrace{(2-(-1))^{\frac{2}{3}}}_{>0}} < 0$, така получихме, че $f(x)$ е намаляваща в интервала $(-\infty, 0)$.

(б) $1 \in \left(0, \frac{4}{3}\right)$ и $f'(1) = \dfrac{\overbrace{4 - 3(1)}^{>0}}{\underbrace{3(1)^{\frac{1}{3}}}_{>0}\underbrace{(2-(1))^{\frac{2}{3}}}_{>0}} > 0$, така получихме, че $f(x)$ расте в интервала $\left(0, \frac{4}{3}\right)$.

(в) Нека $x \in \left(\frac{4}{3}, 2\right)$ и $f'(x) = \dfrac{\overbrace{4 - 3x}^{<0}}{\underbrace{3x^{\frac{1}{3}}}_{>0}\underbrace{(2-x)^{\frac{2}{3}}}_{>0}} < 0$, така получихме, че $f(x)$ намалява в интервала $\left(\frac{4}{3}, 2\right)$.

(г) Нека $x \in (2, +\infty)$ и $f'(x) = \dfrac{\overbrace{4 - 3x}^{<0}}{\underbrace{3x^{\frac{1}{3}}}_{>0}\underbrace{(2-x)^{\frac{2}{3}}}_{>0}} < 0$, така получихме, че $f(x)$ намалява в интервала $(2, +\infty)$.

Посочените изчисления се пишат систематизирано по следния начин:



като където $f'(x) > 0$, то пишем под съответния интервал $+$ и слагаме знака $\nearrow$, което означава, че функцията $f(x)$ расте. И обратно ако $f'(x) < 0$, то пишем под съответния интервал - и слагаме знака $\searrow$, което означава, че функцията $f(x)$ намалява. В 0 имаме локален минимум, тъй като при $x < 0$ $f(x)$ намалява, а при $0 < x < \frac{4}{3}$ $f(x)$ расте. Аналогично при $x = \frac{4}{3}$ имаме локален максимум.