17.Производни от по-висок ред

Галина Люцканова

24 ноември 2013 г.

Задача 17.1: Намерете n-тите производни на функциите:

1. $f(x) = \sin x$
2. $f(x) = \cos x$
3. $f(x) = a^x$
4. $f(x) = x^\alpha$
5. $f(x) = \frac{1}{x}$
6. $f(x) = \ln x$

Решение:

1.

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sin x \\
f'(x) &= \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \\
f''(x) &= -\sin x = \sin\left(x + \frac{2\pi}{2}\right) \\
f'''(x) &= -\cos x = \sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) \\
&\dots \\
f^{(n)}(x) &= \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)
\end{aligned}$$

2. $f(x) = \cos x$

$$\begin{aligned}
f(x) &= \cos x \\
f'(x) &= -\sin x = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \\
f''(x) &= -\cos x = \cos\left(x + \frac{2\pi}{2}\right) \\
f'''(x) &= \sin x = \cos\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) \\
f^{(4)}(x) &= \cos x = \cos\left(x + \frac{4\pi}{2}\right) \\
&\dots \\
f^{(n)}(x) &= \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)
\end{aligned}$$

3. $f(x) = a^x$

$$\begin{aligned}
f(x) &= a^x \\
f'(x) &= a^x \ln a \\
f''(x) &= a^x \ln^2 a \\
f'''(x) &= a^x \ln^3 a \\
&\dots \\
f^{(n)}(x) &= a^x \ln^n a
\end{aligned}$$

4. $f(x) = x^\alpha$

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^\alpha \\
f'(x) &= \alpha x^{\alpha-1} \\
f''(x) &= \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2} \\
f'''(x) &= \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)x^{\alpha-3} \\
&\dots \\
f^{(n)}(x) &= \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-(n-1))x^{\alpha-n}
\end{aligned}$$

5. $f(x) = \frac{1}{x}, \alpha = -1$

$$f^{(n)}(x) = \alpha(-1-1)(-1-2)...(-1-(n-1))x^{-1-n} = (-1)^n n! \frac{1}{x^n}$$

6. $f(x) = \ln x$

$$\begin{aligned}
f(x) &= \ln x \\
f'(x) &= \frac{1}{x} \\
f''(x) &= \frac{-1}{x^2} \\
f'''(x) &= \frac{2}{x^3} \\
&\dots \\
f^{(n)}(x) &= \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}
\end{aligned}$$

Задача 17.2: Да се докаже, че f е n пъти диференцируема, то $[f(ax+b)]^{(n)} = a^n f^{(n)}(ax+b)$.

Доказателство:

$$\begin{aligned}
y &= f(\varphi(x)) \\
y' &= f'_\varphi \varphi' = f'_\varphi a \\
y'' &= f''_\varphi a^2
\end{aligned}$$

Да допуснем, че формулата е вярна за n, ще докажем, че е вярна и за $n+1$.

$$\begin{aligned}
&(f(ax+b))^{(n+1)} = ((f(ax+b))^(n))' = (f^{(n)}(ax+b)a^n)' \\
&= a^n f^{(n+1)}(ax+b)a = a^{n+1} f^{(n+1)}(ax+b)
\end{aligned}$$

Задача 17.3: Да се намери n-тата производна на:

1. $f(x) = \frac{1}{ax+b}$
2. $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$

Решение:

1. $f(x) = \frac{1}{ax+b}$. От предната задача:

$$y^{(n)} = a^n f^{(n)}(ax+b) = a^n \frac{(-1)^n n!}{(ax+b)^{n+1}}$$

Последното равенство е изпълнено, тъй като ако $g(x) = \frac{1}{x}$, то от задача 1.5 имаме, че:

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n n! \frac{1}{x^{n+1}}$$

2. $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$. Сега да преработим малко $f(x)$:

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a\left(x+\frac{b}{a}\right)}{c\left(x+\frac{d}{c}\right)} = \frac{a\left(x+\frac{d}{c}-\frac{d}{c}+\frac{b}{a}\right)}{c\left(x+\frac{d}{c}\right)} = \frac{a}{c}\left(1+\frac{\frac{b}{a}-\frac{d}{c}}{x+\frac{d}{c}}\right)$$

Сега ще пресметнем n-тата производна:

$$\begin{aligned} f^(n)(x) &= \left(\frac{a}{c}\left(1+\frac{\frac{b}{a}-\frac{d}{c}}{x+\frac{d}{c}}\right)\right)^{(n)} = \frac{a}{c}\left(1+\frac{\frac{b}{a}-\frac{d}{c}}{x+\frac{d}{c}}\right)^{(n)} = \\ &= \frac{a}{c}\left((1)^{(n)} + \left(\frac{\frac{b}{a}-\frac{d}{c}}{x+\frac{d}{c}}\right)^{(n)}\right) = \frac{a}{c}\left(0+\left(\frac{b}{a}-\frac{d}{c}\right)\left(\frac{1}{x+\frac{d}{c}}\right)^{(n)}\right) = \\ &= \frac{a}{c}\left(\frac{b}{a}-\frac{d}{c}\right)(-1)^n n! \frac{1}{\left(x+\frac{d}{c}\right)^{n+1}} \end{aligned}$$