14.Диференциал. Диференциране на съставни функции. Производни на елементарни функции

Галина Люцканова

24 ноември 2013 г.

Задачите тук ще съм към тема 13 и тема 14. Преди да започнете да решавате Ви съветвам да си принтирате формулите и да ги използвате, а не да се чудите коя формула къде беше. В процеса на ползване ще успеете да ги научите. А сега към означенията. Над част от знаците '=' ще има означенията:

1. св.I, където $1 \leq I \leq 4$ - свойство I. Например $\stackrel{\text{св.2}}{=\!=}$ - равенството следва по свойство 2.

2. т.I, където $1 \leq I \leq 14$ - формула I в таблицата на производните. Например $\stackrel{\text{т.12}}{=\!=}$ - равенството следва по формула 12 в таблицата на производните.

Задача 14.1: Пресметнете производните на:

1. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$
2. $f(x) = x^2 + x + 5$
3. $f(x) = \sqrt{x}$
4. $f(x) = \sqrt{x}e^x$
5. $f(x) = \dfrac{x^2 + x + 5}{x^4 + x^2 + 1}$

6. $f(x) = e^x + \ln x + \log_a x$
7. $f(x) = e^x \ln x \log_a x$
8. $f(x) = e^x \arcsin x$
9. $f(x) = \dfrac{\arcsin x}{e^x}$
10. $f(x) = \sin x + \cos x$
11. $f(x) = x \sin x + \operatorname{arctg} x \cos x$
12. $f(x) = \operatorname{arctg} x \arcsin x e^x$
13. $f(x) = \dfrac{\operatorname{tg} x \arcsin x}{e^x}$
14. $f(x) = \dfrac{\cos x}{x^2 + \sqrt{x} + \sin x}$

<u>Решение:</u>

1. $[f(x)]' = \left[\dfrac{1}{x^2}\right]' = [x^{-2}]' \overset{\text{т.2}}{=\!=} (-1)x^{-1}$

2. $[f(x)]' = [x^2 + x - 5]' = [x^2]' + [x]' - [5]' \overset{\text{т.1,2}}{=\!=} 2x + 1 - 0 = 2x + 1$

3. $[f(x)]' = [\sqrt{x}]' = [x^{\frac{1}{2}}]' \overset{\text{т.2}}{=\!=} \dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

4. $[f(x)]' = [\sqrt{x}e^x]' \overset{\text{св.2}}{=\!=} [\sqrt{x}]'e^x + \sqrt{x}[e^x]' \overset{\text{т.3}}{=\!=} \dfrac{1}{2\sqrt{x}}e^x + \sqrt{x}e^x$

5. $[f(x)]' = \left[\dfrac{x^2 + x + 5}{x^4 + x^2 + 1}\right]' \overset{\text{св.3}}{=\!=}$

$$\overset{\text{св.3}}{=\!=} \frac{[x^2 + x + 5]'(x^4 + x^2 + 1) - (x^2 + x + 5)[x^4 + x^2 + 1]'}{(x^4 + x^2 + 1)^2} \overset{\text{св.2}}{=\!=}$$

$$\overset{\text{св.1}}{=\!=} \frac{[(x^2)' + (x)' + (5)'](x^4 + x^2 + 1) - (x^2 + x + 5)[(x^4)' + (x^2)' + (1)']}{(x^4 + x^2 + 1)^2} \overset{\text{т.1,2}}{=\!=}$$

$$\overset{\text{т.1,2}}{=\!=} \frac{[2x + 1 + 0](x^4 + x^2 + 1) - (x^2 + x + 5)[4x^3 + 2x + 0]}{(x^4 + x^2 + 1)^2}$$

6. $[f(x)]' = [e^x + \ln x + \log_a x]' \overset{\text{св.1}}{=\!=} [e^x]' + [\ln x]' + [\log_a x]' \overset{\text{т.3,4,6}}{=\!=}$
$\overset{\text{т.3,4,6}}{=\!=} e^x + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x}\ln a$

7. $[f(x)]' = [e^x \ln xa^x]' = [e^x(\ln xa^x)]' \overset{\text{св.2}}{=\!=} (e^x)'(\ln xa^x) + e^x(\ln xa^x)' \overset{\text{св.2}}{=\!=}$
$\overset{\text{св.2}}{=\!=} (e^x)'(\ln xa^x) + e^x[(\ln x)'a^x + \ln x(a^x)'] \overset{\text{т.3,4,5}}{=\!=}$
$\overset{\text{т.3,4,5}}{=\!=} e^x(\ln xa^x) + e^x[(\dfrac{1}{x}a^x + \ln xa^x \ln a]$

8. $(f(x))' = (e^x \arcsin x)' \overset{\text{св.2}}{=\!=} (e^x)' \arcsin x + e^x(\arcsin x)' \overset{\text{т.3,11}}{=\!=} e^x \arcsin x +$
$+ e^x \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

9. $(f(x))' = \left(\dfrac{\arcsin x}{e^x}\right)' \overset{\text{св.3}}{=\!=} \dfrac{(\arcsin x)'e^x - \arcsin x(e^x)'}{(e^x)^2} \overset{\text{т.3,11}}{=\!=}$
$\overset{\text{т.3,11}}{=\!=} \dfrac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}e^x - \arcsin xe^x}{e^{2x}}$

10. $(f(x))' = (\sin x + \cos x)' \overset{\text{св.1}}{=\!=} (\sin x)' + (\cos x)' \overset{\text{т.7,8}}{=\!=} \cos x - \sin x$

11. $(f(x))' = (x \sin x + \operatorname{arctg} x \cos x)' \overset{\text{св.1}}{=\!=} (x \sin x)' + (\operatorname{arctg} x \cos x)' \overset{\text{св.2}}{=\!=}$
$\overset{\text{св.2}}{=\!=} (x)' \sin x + x(\sin x)' + (\operatorname{arctg} x)' \cos x + \operatorname{arctg} x(\cos x)' \overset{\text{т.1,7,8,13}}{=\!=}$
$\overset{\text{т.1,7,8,13}}{=\!=} 1 \sin x + x \cos x + \dfrac{1}{1+x^2} \cos x + \operatorname{arctg} x(-\sin x)$

12. $(f(x))' = (\operatorname{arctg} x(\arcsin xe^x))' \overset{\text{св.2}}{=\!=} \operatorname{arctg} x(\arcsin xe^x)' +$
$+ (\operatorname{arctg} x)' \arcsin xe^x \overset{\text{св.2}}{=\!=} \operatorname{arctg} x\,((\arcsin x)'e^x + \arcsin x(e^x)') +$
$+ (\operatorname{arctg} x)' \arcsin xe^x \overset{\text{т.3,11,13}}{=\!=} \operatorname{arctg} x \left(\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}e^x + \arcsin xe^x\right) +$
$+ \dfrac{1}{1+x^2} \arcsin xe^x$

13. $(f(x))' = \left(\dfrac{\operatorname{tg} x \arcsin x}{e^x}\right)' \overset{\text{св.3}}{=\!=} \dfrac{(\operatorname{tg} x \arcsin x)'e^x - (\operatorname{tg} x \arcsin x)(e^x)'}{(e^x)^2} \overset{\text{св.2}}{=\!=}$
$\overset{\text{св.2}}{=\!=} \dfrac{[(\operatorname{tg} x)' \arcsin x + \operatorname{tg} x(\arcsin x)']e^x - (\operatorname{tg} x \arcsin x)(e^x)'}{(e^x)^2} \overset{\text{т.9,11,3}}{=\!=}$
$\overset{\text{т.9,11,3}}{=\!=} \dfrac{[\frac{1}{\cos^2 x} \arcsin x + \operatorname{tg} x \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}]e^x - (\operatorname{tg} x \arcsin x)e^x}{e^{2x}}$

14. $(f(x))' = \left(\dfrac{\cos x}{x^2+\sqrt{x}+\sin x}\right)' \overset{\text{св.3}}{=\!=\!=}$
$\overset{\text{св.3}}{=\!=\!=} \dfrac{(\cos x)'(x^2+\sqrt{x}+\sin x) - \cos x(x^2+\sqrt{x}+\sin x)'}{(x^2+\sqrt{x}+\sin x)^2} \overset{\text{св.1}}{=\!=\!=}$
$\overset{\text{св.1}}{=\!=\!=} \dfrac{(\cos x)'(x^2+\sqrt{x}+\sin x) - \cos x(x^2)' + (\sqrt{x})' + (\sin x)'}{(x^2+\sqrt{x}+\sin x)^2} \overset{\text{т.8,1,7}}{=\!=\!=}$
$\overset{\text{т.8,1,7}}{=\!=\!=} \dfrac{-\sin x(x^2+\sqrt{x}+\sin x) - \cos x 2x + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + \cos x}{(x^2+\sqrt{x}+\sin x)^2}$ ■

Задача 14.2: Пресметнете производните на съставните функции:

1. $f(x) = \sqrt{23x+54}$
2. $f(x) = \sqrt{xe^x}$
3. $f(x) = e^{x^2+x+5}$
4. $f(x) = \operatorname{arctg} x^2$
5. $f(x) = \operatorname{tg} x^2$
6. $f(x) = \sin 2x + 5$
7. $f(x) = \cos x^2$
8. $f(x) = \arccos \ln x$

Решение:

Съставни функции са функции от функции или $f(g(x))$. Как да разберем, че една функция е съставна? Сега ще ви покажа лесен метод. Да разгледаме например $f(x) = e^{x^2+x+5}$. Поглеждаме в таблицата точно същата функция я нямаме никъде. Имаме подобна e^x и така получаваме, че тази функция е съставна, защото

1. $f(x) = \sqrt{23x+54}$ е съставна функция, защото
   Полагаме $23x + 54 = t$. Тогава по свойство 4 получаваме:
   $(f(x))' = (\sqrt{23x+54})' \overset{\text{св.4}}{=\!=\!=} (\sqrt{t})'(2x+3)' = t$
2. $f(x) = \sqrt{xe^x}$
3. $f(x) = e^{x^2+x+5}$

4. $f(x) = \operatorname{arctg} x^2$
5. $f(x) = \operatorname{tg} x^2$
6. $f(x) = \sin 2x + 5$
7. $f(x) = \cos^2 x$
8. $f(x) = \cos x^2$
9. $f(x) = \arccos \ln x$
10. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 2x + 2}$
11. $f(x) = \sqrt{ax^2 + bx + c}$
12. $f(x) = \dfrac{1}{(\sqrt{x} + 2\sqrt[4]{x})^2}$
13. $f(x) = \sqrt[3]{\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^2}$
14. $f(x) = e^{\frac{1+x^2}{1-x^2}}$
15. $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} \cdot e^{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}$
16. $f(x) = \sqrt{1 + (\ln x)^2}$
17. $f(x) = \log_\pi \dfrac{\pi^x - x^\pi}{\pi^x + x^p}$