4.Граници на редици. Аритметични действия със сходящи редици

Галина Люцканова

26 октомври 2013 г.

Определение 4.1: Безкрайна числова редица е функция от вида:

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{R},$$

където $\mathbb{N}$ е множеството на естествените числа и $\mathbb{R}$ е множеството на реалните числа. За всяко n естествено число $f(n) := x_n$. Тя се бележи обикновено с $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ или само $\{x_n\}$.

Определение 4.2: Редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е ограничена отгоре, ако съществува число $M \in \mathbb{R}$, такова че за всяко $n \in \mathbb{N}$ $\quad a_n \leq M$.

Определение 4.3: Редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е ограничена отдолу, ако съществува число $M \in \mathbb{R}$, такова че за всяко $n \in \mathbb{N}$ $\quad a_n \geq M$.

Определение 4.4: Редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е ограничена, ако е ограничена отгоре и ограничена отдолу.

Определение 4.5: Редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е неограничена, ако не е ограничена отдолу или ограничена отгоре.

Определение 4.6: Казваме, че редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ а е монотонно растяща, ако за всяко $n \in \mathbb{N}$ е изпълнено $a_n \leq a_{n+1}$.

Определение 4.7: Казваме, че редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ а е строго монотонно растяща, ако за всяко $n \in \mathbb{N}$ е изпълнено $a_n < a_{n+1}$.

Определение 4.8: Казваме, че редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ а е монотонно намаляваща, ако за всяко $n \in \mathbb{N}$ е изпълнено $a_n \geq a_{n+1}$.

Определение 4.9: Казваме, че редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ а е строго монотонно намаляваща, ако за всяко $n \in \mathbb{N}$ е изпълнено $a_n > a_{n+1}$.

Определение 4.10: Казваме, че редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е сходяща, ако за всяко $\varepsilon > 0$ съществува индекс на член от редицата ν, зависещ от ε, такъв че винаги когато $n > \nu$ да е изпълнено $|a_n - a| < \varepsilon$. Числото a се нарича граница на редица и съществува само ако $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е сходяща. Границата на редицата се бележи по следния начин $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ (чете се като границата на редицата a_n при n клонящо към безкрайност е a).

Определение 4.11: Казваме, че редицата a_n клони към $+\infty$ (бележим с $\lim a_n \to +\infty$), ако за всяко число M съществува ν, такова че при $n > \nu$ е изпълнено, че $a_n \geq M$.

Определение 4.12: Казваме, че редицата a_n клони към $-\infty$ (бележим с $\lim a_n \to -\infty$), ако за всяко число P съществува ν, такова че при $n > \nu$ е изпълнено, че $a_n \leq P$.

Определение 4.13: Ако $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ (т.е. a_n клони към $+\infty$ или $-\infty$), то казваме, че редицата $\{a_n\}$ е безкрайно голяма.

Определение 4.14: Ако $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, то казваме, че редицата $\{a_n\}$ е безкрайно малка.

Общи свойства:

1. Ако към една редица прибавим или премахнем краен брой елементи, то това не влияе на нейната сходимост.

2. Ако a_n е сходяща, то тя е ограничена.

3. Нека $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, а $\{b_n\}$ е ограничена редица, то тогава $a_n.b_n \to 0$.

Признаци за съществуване на граница:

1. Ако $\{a_n\}$ и $\{c_n\}$ са сходящи и имат граница l и $a_n \leq b_n \leq c_n$ за $n > \nu$, където $\nu \in \mathbb{N}$. То тогава $\{b_n\}$ е сходяща и има граница l. Това свойство е известно още с името Лема за двамата полицаи.

2. Ако $\{c_n\}$ е сходяща и има граница l и $l \leq b_n \leq c_n$ за $n > \nu$, където $\nu \in \mathbb{N}$. То тогава $\{b_n\}$ е сходяща и има граница l. Това свойство е известно още с името лема за единия полицай.

3. Всяка ограничена отгоре монотонно растяща редица е сходяща.

4. Всяка ограничена отдолу монотонно намаляваща редица е сходяща.

Граничен преход в равенства и неравенства:

1. Нека $a_n \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Нека a_n и b_n са сходящи и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. То тогава $a \leq b$.

2. Ако a_n и b_n са сходящи и с граници съответно A и B, тогава:

   (а) $a_n + b_n$ е сходяща и клони към $A + B$;

   (б) $a_n - b_n$ е сходяща и клони към $A - B$;

   (в) $a_n \cdot b_n$ е сходяща и клони към $A \cdot B$;

   (г) Ако $b_n \neq 0$, $B \neq 0$, то редицата $\frac{a_n}{b_n}$ е сходяща и клони към $\frac{A}{B}$;

Теорема 4.1: Нека е дадена редицата a_n, като $a_n > 0$ за всяко n. Да образуваме редицата $b_n = \frac{1}{a_n}$.

1. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \infty$

2. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0$

Твърдение 4.1: Нека $\{a_n\}$ е монотонно растяща редица и нека $a_n \to a$. Тогава $a_n \leq a$.

Твърдение 4.2: Нека $\{a_n\}$ е монотонно намаляваща редица и нека $a_n \to a$. Тогава $a_n \geq a$.
Редицата с общ член $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ е сходяща и клони към e.

Теорема 4.2 (на Щолц) : Нека $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ а и $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ b са две редици от числа, като $b_n \to \infty$ и $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ b е строго растяща. Тогава ако $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = l$, то съществува $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l$.

Следствие 4.1 (на Коши): Нека $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Тогава $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} = a$.

Следствие 4.2: Нека $a_n > 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Тогава $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}} = a$.

Следствие 4.3: Нека $a_n > 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Тогава $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \ldots a_n} = a$.

Следствие 4.4: Нека $a_n > 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a$. Тогава $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = a$.

Задачи за сходимост на редици:

Задача 4.1: Докажете, че редицата $\{q^n\}_{n=1}^{\infty}$ при $|q| < 1$ е безкрайно малка.

Доказателство:
Ще докажем, че $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ ($|q| < 1$).

1. $|q| = 0$, то тогава $q^n = 0^n = 0$.

2. $|q| > 0$. Ще докажем, че за всяко $\varepsilon > 0$ съществува индекс на член от редицата ν, зависещ от ε, такъв че винаги когато $n > \nu$ да е изпълнено $|q^n - 0| < \varepsilon$. Нека $\varepsilon > 0$ е фиксирано произволно число, тогава $|q^n| < \varepsilon$ т.е. $|q|^n < \varepsilon$. Логаритмуваме двете страни на последното неравенство и получаваме $n \lg |q| < \lg \varepsilon$. Понеже $\lg |q| < 0$, то тогава:
$$n > \frac{\lg \varepsilon}{\lg |q|} = \nu$$
И така доказахме това, което искахме.

Задача 4.2: Докажете, че редицата $\left\{\frac{1}{n^k}\right\}$, $k \in N$, $1 \leq k \leq n$, редицата е безкрайно малка. Ще докажем, че $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^k}$.

Доказателство:
Ще докажем, че за всяко $\varepsilon > 0$ съществува индекс на член от редицата ν, зависещ от ε, такъв че винаги когато $n > \nu$ да е изпълнено $|\frac{1}{n^k} - 0| < \varepsilon$. Нека $\varepsilon > 0$ е фиксирано произволно число, тогава $|\frac{1}{n^k}| < \varepsilon$ т.е. $\frac{1}{n^k} < \varepsilon$. И така получаваме $n > \frac{1}{\sqrt[k]{\varepsilon}} = \nu$. При $n > \nu$ е в сила $\left|\frac{1}{n^k}\right| < \varepsilon$. следователно $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} = 0$.

Задача 4.3: Докажете, че редицата $\{\frac{1}{n!}\}$ е безкрайно малка.

Доказателство:

$$0 < \frac{1}{n!} = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n} < \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2} = \frac{1}{2^{n-1}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

От задача 1 имаме, че $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 0$ ($q = \frac{1}{2}$). От теоремата за двамата полицаи $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n!} = 0$.

Намерете границата на редицата

1. Неопределеност от тип $[\frac{\infty}{\infty}]$

Задача 4.4: Намерете границите на редиците:

(а) $a_n = \frac{n^2+n+5}{n^2-n+2}$

(б) $a_n = \frac{2n^2+5n+2}{n^2-6n+7}$

(в) $a_n = \frac{n^2+6n+3}{3n^2-\frac{1}{2}n+2}$

(г) $a_n = \frac{n^3+n+4}{n^2-n+5}$

(д) $a_n = \frac{n^2+3n+7}{n^3-n+1}$

(е) $a_n = \frac{n^3+4e^n+n^2+1}{n^3+2\pi^n+2n^2+2}$

(ж) $a_n = \frac{a_kn^k+a_{k-1}n^{k-1}+\ldots+a_0}{b_pn^p+b_{p-1}n^{p-1}+\ldots+b_0}$, като k, p са фиксирани

Решение:

За всички редици имаме неопределеност от тип $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Изкарваме най-голямата степен на n пред скоби.

(а) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+n+5}{n^2-n+2} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2\left(1+\frac{1}{n}+\frac{5}{n^2}\right)}{n^2\left(1-\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}\right)} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n}+\frac{5}{n^2}}{1-\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}} = \frac{1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5}{n^2}}{1-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n^2}} = \frac{1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}+5\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}{1-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}+2\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}$

Понеже при $n\to\infty$ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2} = 0$. И така получаваме $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+n+5}{n^2-n+2} = \frac{1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}+5\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}{1-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}+2\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}} = \frac{1+0+5\cdot 0}{1-0+2\cdot} = \frac{1}{1} = 1$

(б) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^2+5n+2}{n^2-6n+7} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2\left(2+\frac{5}{n}+\frac{2}{n^2}\right)}{n^2\left(1-\frac{6}{n}+\frac{7}{n^2}\right)} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2+\frac{5}{n}+\frac{2}{n^2}}{1-\frac{6}{n}+\frac{7}{n^2}} = \frac{2+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n^2}}{1-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{6}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{7}{n^2}}$

Понеже при $n\to\infty$ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2} = 0$. И така получаваме $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^2+5n+2}{n^2-6n+7} = \frac{2+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n^2}}{1-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{6}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{7}{n^2}} = \frac{2}{1} = 2$

(в) $a_n = \frac{n^2+6n+3}{3n^2-\frac{1}{2}n+2}$

(г) $a_n = \frac{n^3+n+4}{n^2-n+5}$

(д) $a_n = \frac{n^2+3n+7}{n^3-n+1}$

(е) $a_n = \frac{a_kn^k+a_{k-1}n^{k-1}+\ldots+a_0}{b_pn^p+b_{p-1}n^{p-1}+\ldots+b_0}$

2. Граници с радикали:

(а) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n}}{n+\sqrt[3]{n^2+1}}$

(б) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n^2+5n+2}-\sqrt{n^2+4n+2}$

3. Докажете следните важни граници:

(а) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{a^n} = 0$

(б) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^\alpha}{a^n} = 0$

(в) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$

(г) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\log_a n}{n} = 0$ при $a > 1$

“Скорост ”на клонение към ∞ при $a > 1$, $\alpha > 1$:
$\log_a n$, n, a^α, a^n, $n!$.

4. Докажете следните следствия на основната граница $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$:

   (а) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+k} = e,\ k \in \mathbb{Z}$

   (б) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n+k}\right)^{n} = e,\ k \in \mathbb{Z}$

   (в) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n+k} = e,\ k \in \mathbb{Z}$

   (г) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n+k} = e,\ k \in \mathbb{Z}$

   (д) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{k}{n}\right)^{n+k} = e^k,\ k \in \mathbb{Z}$

   (е) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1-\frac{k}{n}\right)^{n+k} = e^{-k},\ k \in \mathbb{Z}$

   (ж) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{nk}\right)^{n} = \sqrt[k]{e},\ k \in \mathbb{N}$

   (з) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^{n} = e^x,\ x \in \mathbb{R}$

   (и) Нека $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. Тогава $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{x_n}{n}\right)^{n} = e^x,\ x \in \mathbb{R}$

5. Приложете основната граница $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ и следствията от нея (няма нужда да ги помните, важно е да можете да си ги изведете) в пресмятането на следните граници:

   (а) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n^2-4}{n^2-16}\right)^n$

   (б) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{(n+1)(n+3)(n+5)}{(n+2)(n+4)(n+6)}\right)^n$

   (в) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n^2+3n+2}{n^2+5n+7}\right)$