8.Граници на функции

Галина Люцканова

24 ноември 2013 г.

Основни неопределености: Нека $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$ и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = b$.

Основни определености Те се получават $a \neq \begin{cases} 0 \\ \infty \end{cases}$ и $b \neq \begin{cases} 0 \\ \infty \end{cases}$ и в следните случаи:

1. $[\infty + \infty] = \infty$
2. $[\infty \cdot \infty] = \infty$
3. $[a + \infty] = \infty$
4. $[a \cdot \infty] = \infty$
5. $[a \cdot 0] = 0$
6. $[\frac{a}{0}] = \infty$
7. $[\frac{a}{\infty}] = 0$
8. $[\infty + b] = \infty$
9. $[\infty \cdot b] = \infty$
10. $[0 \cdot b] = 0$
11. $[\frac{b}{0}] = \infty$
12. $[\frac{b}{\infty}] = 0$
13. $[\frac{0}{\infty}] = 0$
14. $[\frac{\infty}{0}] = \infty$

Основни неопределености Нека $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$ и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = b$. Основните неопределености се получават $a = \begin{cases} 0 \\ \infty \end{cases}$ и $b = \begin{cases} 0 \\ \infty \end{cases}$ и в следните случаи:

1. $\left[\frac{0}{0}\right]$
2. $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$

3. $[0 \cdot \infty]$

4. $[\infty - \infty]$

5. $[1^\infty]$

Свеждане на неопределености от тип 3),4) и 5) към неопределености 1) и 2):

1. $[0 \cdot \infty] = \left[\frac{\infty}{\frac{1}{0}}\right] = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$

2. $[0 \cdot \infty] = \left[\frac{0}{\frac{1}{\infty}}\right] = \left[\frac{0}{0}\right]$

3. $[\infty - \infty] = \left[\frac{1}{0} - \frac{1}{0}\right] = \left[\frac{1-1}{0}\right] = \left[\frac{0}{0}\right]$

4. $[1^\infty] = [e^{\ln 1^\infty}] = [e^{\infty \ln 1}] = [e^{\infty \cdot 0}]$

1. Задачи, които са смятат чрез рационализиране

Задача 8.1: Пресметнете границите:

(a) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2 - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1}$

(б) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}}{x}$

(в) $\lim\limits_{x \to \infty} \sqrt{x^2 - 2x - 1} - \sqrt{x^2 - 7x + 3}$

Решение:

(a) Тук получаваме неопределеност $\left[\frac{0}{0}\right]$.

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x^2 - \sqrt{x})(x^2 + \sqrt{x})(\sqrt{x} + 1)}{(\sqrt{x} - 1)(x^2 + \sqrt{x})(\sqrt{x} + 1)} = \lim_{x \to 1} \frac{(x^4 - x)(\sqrt{x} + 1)}{(x - 1)(x^2 + \sqrt{x})} =$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{x(x^3 - 1)(\sqrt{x} + 1)}{(x - 1)(x^2 + \sqrt{x})} = \lim_{x \to 1} \frac{x(x - 1)(x^2 + x + 1)(\sqrt{x} + 1)}{(x - 1)(x^2 + \sqrt{x})} =$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{x(x^2 + x + 1)(\sqrt{x} + 1)}{(x^2 + \sqrt{x})} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 2}{2} = 3$$

(б) Тук получаваме неопределеност $\left[\frac{0}{0}\right]$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x})(\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{(1+x)(1-x)}+\sqrt[3]{(1-x)^2})}{x(\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{(1+x)(1-x)}+\sqrt[3]{(1-x)^2})}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)-(1-x)}{x(\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{(1+x)(1-x)}+\sqrt[3]{(1-x)^2})}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{2}{\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{(1+x)(1-x)}+\sqrt[3]{(1-x)^2}}=\frac{2}{3}$$

(в) Тук получаваме неопределеност $[\infty-\infty]$.

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-2x-1}-\sqrt{x^2-7x+3})=$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2-2x-1}-\sqrt{x^2-7x+3})(\sqrt{x^2-2x-1}+\sqrt{x^2-7x+3})}{(\sqrt{x^2-2x-1}+\sqrt{x^2-7x+3})}=$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^2-2x-1-(x^2-7x+3))}{(\sqrt{x^2-2x-1}+\sqrt{x^2-7x+3})}=\lim_{x\to\infty}\frac{5x-4}{(\sqrt{x^2-2x-1}+\sqrt{x^2-7x+3})}=$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{|x|(5-\frac{4}{x})}{|x|(\sqrt{1-\frac{2}{|x|}-\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{7}{|x|}+\frac{3}{x^2}})}=$$

Понеже $x\to+\infty$, то следователно $|x|=x$, т.е. границата на функцията е $\frac{5}{2}$.

2. Граници, за чието пресмятане се използва основата граница $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$

Задача 8.2: Пресметнете границите:

(а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos^3 x}{x\sin 2x}$

(б) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\cos\frac{\pi x}{2}}{1-\sqrt{x}}$

(в) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{1-2\cos x}{\pi-3x}$

Решение:

(а) Неопределеност $\left[\frac{0}{0}\right]$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^3 x}{x\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\overbrace{(1-\cos x)}^{2\sin^2\frac{x}{2}}(1+\cos x+\cos^2 x)}{x\underbrace{\sin 2x}_{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}(1+\cos x+\cos^2 x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}(1+\cos x+\cos^2 x)\frac{1}{2}}{\frac{x}{2}}=$$

$$=1\cdot\lim_{x\to 0}(1+\cos x+\cos^2 x)\frac{1}{2}=(1+\cos 0+\cos^2 0)\frac{1}{2}=(1+1++1)\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

(б) Неопределеност $\left[\frac{0}{0}\right]$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\cos\frac{\pi x}{2}}{1-\sqrt{x}}=\lim_{x\to 1}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi x}{2}\right)(1+\sqrt{x})}{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}=\lim_{x\to 1}\frac{\sin\frac{\pi}{2}(1-x)(1+\sqrt{x})\frac{\pi}{2}}{(1-x)\frac{\pi}{2}}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\sin\frac{\pi}{2}(1-x)}{(1-x)\frac{\pi}{2}}\cdot\lim_{x\to 1}(1+\sqrt{x})\frac{\pi}{2}=1\cdot(1+\sqrt{1})\frac{\pi}{2}=2\frac{\pi}{2}=\pi$$

(в) Неопределеност $\left[\frac{0}{0}\right]$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{1-2\cos x}{\pi-3x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{2(\overbrace{\frac{1}{2}}^{\cos\frac{\pi}{3}}-\cos x)}{\pi-3x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{2\cdot 2\sin\frac{x+\frac{\pi}{3}}{2}\sin\frac{x-\frac{\pi}{3}}{2}}{\pi-3x}=$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{4\sin\frac{3x+\pi}{6}\sin\frac{3x-\pi}{6}}{\frac{3x-\pi}{6}\cdot(-6)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\sin\frac{3x-\pi}{6}}{\frac{3x-\pi}{6}}\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}4\frac{\sin\frac{3x+\pi}{6}}{-6}=1\cdot 4\frac{\sin\frac{3\frac{\pi}{3}+\pi}{6}}{-6}=$$

$$=4\frac{\sin\frac{\pi}{3}}{-6}=-\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

3. Граници, които се решават чрез основните граници $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$, $\lim\limits_{x\to 0}(1+\frac{1}{x})^x=e$

Задача 8.3: Докажете, че:

(а) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

(б) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = \ln a$

(в) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(1+x)^p-1)}{x} = p$

<u>Доказателство:</u>

(а) Неопределеност $\left[\frac{0}{0}\right]$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\ln(1+x) = \lim_{x\to 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln \lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} =$$
$$= \ln e = 1$$

(б) Неопределеност $\left[\frac{0}{0}\right]$. Полагаме $a^x - 1 = t$, тогава при $x \to 0$, $t \to 0$. Остава да изразим x спрямо t:

$$a^x - 1 = t$$
$$a^x = 1 + t$$
$$x = \log_a 1 + t = \frac{\ln(1+t)}{\ln a}$$

Сега да заместим полученото в границата:

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = \lim_{t\to 0} \frac{t}{\frac{\ln 1+t}{\ln a}} = \lim_{t\to 0} \frac{t}{\ln(1+t)} \cdot \ln a = 1 \cdot \ln a = \ln a$$

(в) Неопределеност $\left[\frac{0}{0}\right]$

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^p-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^p-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{\ln(1+x)^p}-1}{x} =$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{e^{p\ln(1+x)}-1}{p\ln(1+x)} \cdot \frac{p\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{p\ln(1+x)}-1}{p\ln(1+x)} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{p\ln(1+x)}{x} =$$
$$= 1 \cdot p \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = p \cdot 1 = p$$