3.Числови функции, графики. Обратно изображение

Галина Люцканова

9 октомври 2013 г.

От лекциите показахме, че:

1. $\sin(\arcsin(y)) = y \qquad \forall y \in [-1; +1]$
2. $\cos(\arccos(y)) = y \qquad \forall y \in [-1; +1]$
3. $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(y)) = y \qquad \forall y \in \mathbb{R}$
4. $\operatorname{cotg}(\operatorname{arccotg}(y)) = y \qquad \forall y \in \mathbb{R}$
5. $\arcsin(\sin(x)) = x \qquad \forall x \in [-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2}]$
6. $\arccos(\cos(x)) = x \qquad \forall x \in [0, \pi]$
7. $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(x)) = x \qquad \forall x \in (-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2})$
8. $\operatorname{arccotg}(\operatorname{cotg}(x)) = x \qquad \forall x \in (0, \pi)$

Общи начини да се доказват тъждествата с обратните тригонометрични функции

Задача 3.1: Докажете, че $\sin(2\operatorname{arctg} x) = \frac{2x}{1+x^2}$

Доказателство:
Знаем, че $\sin\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$. Тогава

$$\sin(2\operatorname{arctg} x) = \frac{2\operatorname{tg}\frac{2\operatorname{arctg} x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{2\operatorname{arctg} x}{2}} = \frac{2\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)}{1+\operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} x)} \overset{(3)}{=\!=} \frac{2x}{1+x^2}$$

Задача 3.2: $\cos(2\operatorname{arctg} x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$

Доказателство:

Подсказка $\sin\alpha = \dfrac{1 - \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$.

Задача 3.3: $\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2} \qquad -1 \leq x \leq 1.$

Доказателство:

Понеже $\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha}$, то тогава получаваме:

$$\sin(\arccos x) = \sqrt{1-\cos^2(\arccos x)} \overset{(2)}{=\!=} \sqrt{1-x^2}$$

Задача 3.4: Докажете, че:

1. $\arcsin(-x) = -\arcsin x \quad -1 \leq x \leq 1$
2. $\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$
3. $\arccos(-x) = \pi - \arccos x \quad -1 \leq x \leq 1$
4. $\operatorname{arccotg}(-x) = \pi - \operatorname{arccotg} x$

Доказателство:

1. $\arcsin(-x) = -\arcsin x \quad -1 \leq x \leq 1$

Полагаме $\arcsin(-x) = t$. Тогава $-x = \sin t$ и $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2}\right]$ т.е. $x = -\sin t$ и $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2}\right]$. Така получаваме за лявата страна:

$$\arcsin(-x) = t \tag{1}$$

За дясната страна имаме:

$$-\arcsin x = -\arcsin(-\sin t) = -\arcsin(\sin(-t))$$

Понеже $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2}\right]$, то и $-t \in \left[-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2}\right]$ и за дясната страна получаваме:

$$-\arcsin x = -\arcsin(\sin(-t)) = -(-t) = t \tag{2}$$

От (1) и (2) следва, че $\arcsin(-x) = -\arcsin x \quad -1 \leq x \leq 1$

2. $\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$
   Аналогично на предишната подточка.

3. $\arccos(-x) = \pi - \arccos x \quad -1 \leq x \leq 1$

4. $\operatorname{arccotg}(-x) = \pi - \operatorname{arccotg} x$