2.Математическа индукция. Нютонов бином

Галина Люцканова

22 септември 2013 г.

Ще започнем с теорията, която ще ползваме в тези задачи: Видове числа:

1. Естествени числа $\mathbb{N}$ 1,2,3....
2. Цели числа $\mathbb{Z}$ $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$....
3. Рационални числа $\mathbb{Q}$ - всички числа, които се представят като частно на 2 цели числа $q = \frac{m}{n}$, където $m, m \in \mathbb{Z}(n \neq 0)$.
4. Ирационални числа $\mathbb{I}$ - всички числа, които не са рационални. $\mathbb{Q} \cap I = \emptyset$
5. Реални числа $\mathbb{R}$: $\mathbb{Q} \cup \mathbb{I} = \mathbb{R}$. Реалните числа могат да се представят като точка от права.
6. Комплексни числа $\mathbb{C}$ - наредени двойки от реални числа. Комплексните числа могат да се представят като точка в равнина.

Математическа индукция: За да докажем, че едно твърдение е вярно за всяко $n \in \mathbb{N}$ (или за всяко $n \leq p$, където p е фиксирано естествено число) е достатъчно:

1. Да проверим дали тçрдението е вярно за $n = 1$(или $n = p$)
2. Да допуснем, че твърдението е изпълнено за $n = k$
3. Да докажем, че твърдението е вярно за $n = k + 1$.

Индукция и равенство

Задача 2.1: Докажете твърдението:

$$1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(n+2)}{6} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Доказателство:

Разбира се ще докажем твърдението по индукция. За целта:

1. Ще проверим дали тръдението е вярно за $n = 1$ т.е.

$$1^2 \stackrel{?}{=} \frac{1(1+1)(1+2)}{6} = \frac{6}{6} = 1.$$

   Това очевидно е изпълнено.

2. Да допуснем, че твърдението е изпълнено за $n = k$ т.е.

$$1^2 + 2^2 + ... + k^2 = \frac{k(k+1)(k+2)}{6} \qquad (\star)$$

3. Да докажем, че твърдението е вярно за $n = k + 1$ т.е.

$$1^2 + 2^2 + ... + (k+1)^2 = \frac{(k+1)((k+1)+1)((k+1)+2)}{6} \qquad (\star\star)$$

   За целта взимамем $(\star)$ и добавяме от двете страни $(k+1)^2$, за да получим лявата страна на $(\star\star)$:

$$1^2 + 2^2 + ... + k^2 + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(k+2)}{6} + (k+1)^2 \qquad (\star\star\star)$$

   и така ни остава да преобразуваме само дясната страна на $(\star\star\star)$ до $(\star\star)$, което става по следния начин:

$$\begin{aligned}
1^2 + 2^2 + ... + k^2 + (k+1)^2 &= \frac{k(k+1)(k+2)}{6} + (k+1)^2 = \\
&= \frac{k+1}{6}(k(2k+1) + 6(k+1)) = \frac{k+1}{6}(2k^2 + k + 6k + 6) = \\
&= \frac{(k+1)(2k^2 + 7k + 6)}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} = \\
&= \frac{(k+1)((k+1)+1)((k+1)+2)}{6}. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Задача 2.2: Докажете твърдението:

$$1^3 + 2^3 + ... + n^3 = \frac{(1+n)^2 n^2}{4} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Доказателство: Разбира се ще докажем твърдението по индукция. За целта:

1. Ще проверим дали търдението е вярно за $n = 1$ т.е.

$$1^3 \stackrel{?}{=} \frac{(1+1)^2 1^2}{4} = \frac{6}{6} = 1.$$

   Това очевидно е изпълено.

2. Да допуснем, че твърдението е изпълнено за $n = k$ т.е.

$$1^3 + 2^3 + ... + k^3 = \frac{(1+k)^2 k^2}{4} \qquad (\star)$$

3. Да докажем, че твърдението е вярно за $n = k + 1$ т.е.

$$1^3 + 2^3 + ... + k^3 + (k+1)^3 = \frac{(1+(k+1))^2 (k+1)^2}{4} \qquad (\star\star)$$

   За целта взимамем $(\star)$ и добавяме от двете страни $(k+1)^2$, за да получим лявата страна на $(\star\star)$:

$$1^3 + 2^3 + ... + k^3 + (k+1)^3 = \frac{(1+k)^2 k^2}{4} + (k+1)^3 \qquad (\star\star\star)$$

   и така ни остава да преобразуваме само дясната страна на $(\star\star\star)$ до $(\star\star)$, което става по следния начин:

$$\begin{aligned} 1^3 + 2^3 + ... + k^3 + (k+1)^3 &= \frac{(1+k)^2 k^2}{4} + (k+1)^3 = \\ &= \frac{(k+1)^2}{4}(k^2 + 4(k+1)) = \frac{(k+1)^2}{4}(k^2 + 4k + 4) = \\ &= \frac{(k+1)^2 (k+2)^2}{4} = \frac{(1+(k+1))^2 (k+1)^2}{4} \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

Задача 2.3: Докажете твърдението:

$$\frac{1}{2} + \cos\varphi + \cos 2\varphi + ... + \cos n\varphi = \frac{\sin(2n+1)\frac{\varphi}{2}}{2\sin\frac{\varphi}{2}} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Доказателство:

Разбира се ще докажем твърдението по индукция. За целта:

1. Ще проверим дали трърдението е вярно за $n = 1$ т.е.

$$\frac{1}{2} + \cos\varphi \stackrel{?}{=} \frac{\sin\frac{3\varphi}{2}}{2\sin\frac{\varphi}{2}}$$

Да преработим дясната част:

$$\frac{\sin\frac{3\varphi}{2}}{2\sin\frac{\varphi}{2}} = \frac{\sin\left(\frac{\varphi}{2}+\varphi\right)}{2\sin\frac{\varphi}{2}} = \frac{\sin\frac{\varphi}{2}\cos\varphi + \cos\frac{\varphi}{2}\sin\varphi}{2\sin\frac{\varphi}{2}} =$$
$$= \frac{\sin\frac{\varphi}{2}\cos\varphi}{2\sin\frac{\varphi}{2}} + \frac{\cos\frac{\varphi}{2}2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}}{2\sin\frac{\varphi}{2}} = \frac{\cos\varphi}{2} + \cos^2\frac{\varphi}{2} =$$
$$= \cos\varphi + \frac{1+\cos\varphi}{2} = \frac{1}{2} + \cos\varphi$$

И така получихме, че твърдението е изпълнено за $n = 1$

2. Да допуснем, че твърдението е изпълнено за $n = k$ т.е.

$$\frac{1}{2} + \cos\varphi + \cos 2\varphi + ... + \cos k\varphi = \frac{\sin(2k+1)\frac{\varphi}{2}}{2\sin\frac{\varphi}{2}} \qquad (\star)$$

3. Да докажем, че твърдението е вярно за $n = k + 1$ т.е.

$$\frac{1}{2} + \cos\varphi + \cos 2\varphi + ... + \cos(k+1)\varphi = \frac{\sin(2(k+1)+1)\frac{\varphi}{2}}{2\sin\frac{\varphi}{2}} \qquad (\star\star)$$

За целта взимамем $(\star)$ и добавяме от двете страни $\cos(k+1)\varphi$, за да получим лявата страна на $(\star\star)$:

$$\frac{1}{2} + \cos\varphi + \cos 2\varphi + ... + \cos(k+1)\varphi = \frac{\sin(2k+1)\frac{\varphi}{2}}{2\sin\frac{\varphi}{2}} + \cos(k+1)\varphi \qquad (\star\star\star)$$

и така ни остава да преобразуваме само дясната страна на $(\star\star\star)$ до дясната страна на $(\star\star)$, което става по следния начин:

$$\begin{aligned}
&\frac{\sin(2k+1)\frac{\varphi}{2}}{2\sin\frac{\varphi}{2}}+\cos{(k+1)\varphi}=\frac{\sin(2k+1)\frac{\varphi}{2}+2\sin\frac{\varphi}{2}\cos{(k+1)\varphi}}{2\sin\frac{\varphi}{2}}=\\
&=\frac{\sin(2k+1)\frac{\varphi}{2}+2\frac{1}{2}\left[\sin\left[\frac{\varphi}{2}+(k+1)\varphi\right]+\sin\left[\frac{\varphi}{2}-(k+1)\varphi\right]\right]}{2\sin\frac{\varphi}{2}}=\\
&=\frac{\sin(2k+1)\frac{\varphi}{2}+\sin{(2k+3)}\,\frac{\varphi}{2}+\sin(-2k-1)\frac{\varphi}{2}}{2\sin\frac{\varphi}{2}}=\frac{\sin{(2k+3)}\,\frac{\varphi}{2}}{2\sin\frac{\varphi}{2}}=\\
&=\frac{\sin(2(k+1)+1)\frac{\varphi}{2}}{2\sin\frac{\varphi}{2}}
\end{aligned}$$

Следователно доказахме твърдението по индукция. ■

Индукция в неравенство Индукцията освен за доказателство на равенства се ползва и при доказателството на неравенства

Задача 2.4: Докажете, че за n числа: $x_1, x_2, ..., x_n$, които са с един и същ знак и $x_i > -1$ за $i = 1, 2, ..., n$ е всила неравенството:

$$(1+x_1)(1+x_2)...(1+x_n) \geq 1+x_1+x_2+...+x_n$$

Доказателство: Отново ще докажем неравенството по индукция:

1. Ще проверим дали трърдението е вярно за $n = 1$ т.е.

$$1+x_1 \stackrel{?}{=} 1+x_1,$$

   което е изпълнено

2. Да допуснем, че твърдението е изпълнено за $n = k$ т.е.

$$(1+x_1)(1+x_2)...(1+x_k) \geq 1+x_1+x_2+...+x_k \qquad (*)$$

3. Да докажем, че твърдението е вярно за $n = k+1$ т.е.

$$(1+x_1)(1+x_2)...(1+x_{k+1}) \geq 1+x_1+x_2+...+x_k+x_{k+1}$$

За целта умножаваме двете страни на неравенството (*) с $1 + x_{k+1}$, което е положително от условието на теоремата:

$$(1 + x_1)(1 + x_2)...(1 + x_k)(1 + x_{k+1}) \geq (1 + x_1 + x_2 + ... + x_k)(1 + x_{k+1}) \geq$$
$$\geq (1 + x_1 + x_2 + ... + x_k) + (1 + x_1 + x_2 + ... + x_k)x_{k+1}$$

Остана да използваме факта, че $x_1, x_2, ..., x_n$ са с един и същ знак. Затова ще и разгледаме 3 случая, всички са с положителен знак, всички са нули и всички са с отрицателен знак.

(а) Нека $x_1, x_2, ..., x_k, x_{k+1} > 0$. Тогава:

$$1 + x_1 + x_2 + ... + x_k > 1$$
$$(1 + x_1 + x_2 + ... + x_k)x_{k+1} > 1 \cdot x_{k+1} = x_{k+1}$$

И така получихме:

$$(1 + x_1)(1 + x_2)...(1 + x_k)(1 + x_{k+1}) \geq (1 + x_1 + x_2 + ... + x_k)+$$
$$+ (1 + x_1 + x_2 + ... + x_k)x_{k+1} > 1 + x_1 + x_2 + ... + x_k + x_{k+1}$$

(б) Нека $x_1 = x_2 = ... = x_k = x_{k+1} = 0$. Тогава проверяваме директно неравенството:

$$1 \cdot 1...1 \geq 1$$

(в) Нека $x_1, x_2, ..., x_k, x_{k+1} < 0$. Тогава:

$$x_1 + x_2 + ... + x_k < 0$$
$$1 + x_1 + x_2 + ... + x_k < 1$$

Умножаваме двете страни на последното неравенство с $x_{k+1} < 0$ и така получихме:

$$(1 + x_1 + x_2 + ... + x_k)x_{k+1} > x_{k+1}$$

Сега остава да заместим в неравенството:

$$(1 + x_1)(1 + x_2)...(1 + x_k)(1 + x_{k+1}) \geq (1 + x_1 + x_2 + ... + x_k)+$$
$$+ (1 + x_1 + x_2 + ... + x_k)x_{k+1} > 1 + x_1 + x_2 + ... + x_k + x_{k+1}$$

Следователно доказахме твърдението по индукция. ■