0.1 Безкрайната точка. Сфера на Риман

Дефиниция 1. Околност на безкрайната точка се нарича множество от вида $\Big\{z \in \mathbb{C} \,:\, |z| > r\Big\} \bigcup \{\infty\}$, където $r > 0$ е произволно реално число.

Ще казваме, че редицата $\{c_n\}$ клони към ∞, което означаваме $\lim_{n\to\infty} c_n = \infty$, ако за всяко $R > 0$ съществува число $N(R) > 0$, такава, че $|c_n| > R$ при $n > N(R)$. Следователно условието $\lim_{n\to\infty} c_n = \infty$ е еквивалентно на условието $\lim_{n\to\infty} |c_n| = \infty$. Ще отбележим, че ако $c_n \neq 0$, условието $\lim_{n\to\infty} c_n = \infty$ е еквивалентно на условието $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{c_n} = 0$. За точката ∞ понятието аргумент не се въвежда, т.е. е лишено от смисъл. Ще напомним, че и за точката $z = 0$ понятието $\arg 0$ също е лишено от смисъл.

Множеството $\overline{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \bigcup \{\infty\}$ се нарича **разширена комплексна равнина**. Всички основни топологични понятия, въведени по-горе за $\mathbb{C}$, се пренасят и върху разширената комплексна равнина $\overline{\mathbb{C}}$.

Нагледно геометрично изображение на $\overline{\mathbb{C}}$ може да се получи с помощта на **стереографската проекция**.

Нека в $\mathbb{R}^3$ построим сфера S с център $(0, 0, \frac{1}{2})$ и радиус $\frac{1}{2}$,

$$S = \Big\{(\xi, \eta, \zeta) \in \mathbb{R}^3 \,:\, \xi^2 + \eta^2 + \Big(\zeta - \frac{1}{2}\Big)^2 = \frac{1}{4}\Big\}.$$

Да отъждествим комплексната равнина $\mathbb{C}$ равнината $\zeta = 0$ в $\mathbb{R}^3$ и да съпоставим на всяка точка $z = x + iy$ точката $Z = (\xi, \eta, \zeta)$, която се получава от пресичането на сферата S с лъч, съединяващ z със северния полюс $N = (0, 0, 1)$ на сферата S. За да изразим координатите на точката Z чрез z, да запишем лъча в параметричен вид

$$\xi = tx,\ \eta = ty,\ \zeta = 1 - t, \quad t \geq 0.$$

Значението на параметъра t, което съответства на точката на пресичане на лъча със S, се намира от уравненията

$$t^2(x^2 + y^2) + (\frac{1}{2} - t)^2 = \frac{1}{4} \ \Rightarrow\ t = \frac{1}{1 + |z|^2}.$$

Следователно координатите на $Z = (\xi, \eta, \zeta)$ се получават от формулите

$$\xi = \frac{x}{1 + |z|^2},\ \eta = \frac{y}{1 + |z|^2},\ \zeta = \frac{|z|^2}{1 + |z|^2}. \tag{1}$$

Обратното изображение се намира от съотношението $t = 1-\zeta$, откъдето

$$x = \frac{\xi}{1-\zeta},\ y = \frac{\eta}{1-\zeta}. \tag{2}$$

От приведените формули следва, че стереографската проекция $Z \leftrightarrow z$ осъществява взаимно-еднозначно съответствие между точките на сферата $S\backslash\{N\}$ без северния полюс N и комплексната равнина $\mathbb{C}$. При това околност на безкрайната точка $\infty \in \overline{\mathbb{C}}$ се изобразява в околност на северния полюс N на сферата S. Тогава, ако продължим стереографската проекция $S\backslash\{N\} \leftrightarrow \mathbb{C}$ до съответствието $S \leftrightarrow \overline{\mathbb{C}}$, съпоставяйки на северния полюс N безкрайната точка $\infty \in \overline{\mathbb{C}}$, то полученото изображение е хомеоморфизъм[1] между S и $\overline{\mathbb{C}}$. Построеният модел на разширената комплексна равнина $\overline{\mathbb{C}}$ се нарича **сфера на Риман**.

Ще разглеждаме правите в $\mathbb{C}$ като окръжности с безкрайно голям радиус. Основното свойство на стереографската проекция се дава със следната

Теорема. При стереографската проекция всяка окръжност в $\mathbb{C}$ се изобразява в окръжност от S и обратно (окръжност от S е всяко сечение на S с равнина от $\mathbb{R}^3$).

Доказателство. Да припомним, че окръжност в $\mathbb{C}$ се задава с уравнението

$$A(x^2+y^2) + Bx + Cy + D = 0, \quad B^2 + C^2 - 4AD > 0, \tag{3}$$

което при $A = 0$ се свежда до права. Замествайки x и y с формулите (2) получаваме

$$B\xi + C\eta + (A-D)\zeta + D = 0, \tag{4}$$

т. е. равнина в $\mathbb{R}^3$, чието разстояние до точката $(0, 0, \frac{1}{2})$ е по-малко от $\frac{1}{2}$ поради условието в (3). Следователно сечението на сферата S с равнината (4) е окръжност, лежаща върху S. При $A = 0$ (случаят на права в $\mathbb{C}$) точката $N(0,0,1)$ лежи на тази окръжност, защото удовлетворява (4). Това показва, че проекцията на всяка права от $\mathbb{C}$ е окръжност, минаваща през N, т. е. правите минават през точката ∞.

Нека отбележим, че и обратното е вярно: при трансформацията (1) образът на всяка окръжност от S е окръжност в $\mathbb{C}$.

[1] *Хомеоморфизъм* наричаме взаимно-еднозначно съответствие, което е непрекъснато и в двете посоки.