ДЕТЕРМИНАНТИ

От гледна точка на изследването на линейни системи, може да се каже, че идеята за т.н. детерминанта като число, характеризиращо дадена квадратна матрица, се появява още при системите от втори ред, с общ вид (вж. **I** раздел):

$$\left| \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{array} \right.$$

Ако една такава система има единствено решение (x_1^0, x_2^0), решавайки я, напр. чрез последователно изключване на неизвестните, можем да "открием", че за отговора има универсална (валидна за всеки конкретен пример) формула:

$$x_1^0 = \frac{b_1 a_{22} - b_2 a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \; x_2^0 = \frac{b_2 a_{11} - b_1 a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

Общата величина от знаменателите по-горе фигуративно ще означим като таблица,

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, предвид че стойността й еднозначно се "формира" от елементите на матрицата

$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, по нагледното правило: произведението на елементите от главния диагонал, минус произведението на елементите от другия диагонал".

В общия случай, ако A е n-мерна квадратна матрица,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

ще й съпоставим величина, която таблично означаваме като

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \quad (3.1)$$

Тази величина ще наречем *детерминанта на A;* за нея обикновено се използва някое от кратките означения Δ, Δ_A (или $\Delta(A)$), $\det(A), \det(a_{ij})$. Предвид табличното й означение (3.1), ще казваме, че a_{ij} (освен на матрицата *A)* са елементи на детерминантата Δ_A. Ще казваме също, че Δ_A е детерминанта от n-ти ред – състои се от n реда и n стълба. Както и при матрицата A, нейният i-ти ред $(1 \le i \le n)$ е образуван от елементите $a_{i1}, a_{i2,}..., a_{ij}, ..., a_{in}$, а j-тият й стълб $(1 \le j \le n)$ – от елементите $a_{1j}, a_{2j,}..., a_{ij}, ..., a_{nj}$. Детерминантата има числена стойност, определена по специфично правило, чрез елементите a_{ij}, на което ще се спрем по-долу.

3.1. Детерминанти от втори и трети ред.

Ако A е двумерна матрица с елементи a_{ij}, по дефиниция под *детерминанта* на A разбираме числото $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, т.е.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Когато A е тримерна матрица, за да определим стойността на Δ_A, ще потърсим максимална аналогия с двумерния случай, по начина от фиг.8 (по-долу). Интуитивната идея е от “конфигуративно” естество и се състои в това всички елементи a_{ij} да се включат в произведение от тройки множители (от различни редове и стълбове), разположени в линии, успоредни на двата основни диагонала.

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} \boxed{a_{11}} & \boxed{a_{12}} & \boxed{a_{13}} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & \boxed{a_{22}} & \boxed{a_{23}} & \boxed{a_{21}} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & \boxed{a_{33}} & \boxed{a_{31}} & \boxed{a_{23}} \end{array}\right. \Rightarrow \quad a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

Фиг.8а)

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & \boxed{a_{13}} & \boxed{a_{11}} & \boxed{a_{12}} \\ a_{21} & \boxed{a_{22}} & \boxed{a_{23}} & \boxed{a_{21}} & a_{22} \\ \boxed{a_{31}} & \boxed{a_{32}} & \boxed{a_{33}} & a_{31} & a_{23} \end{array}\right. \Rightarrow - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

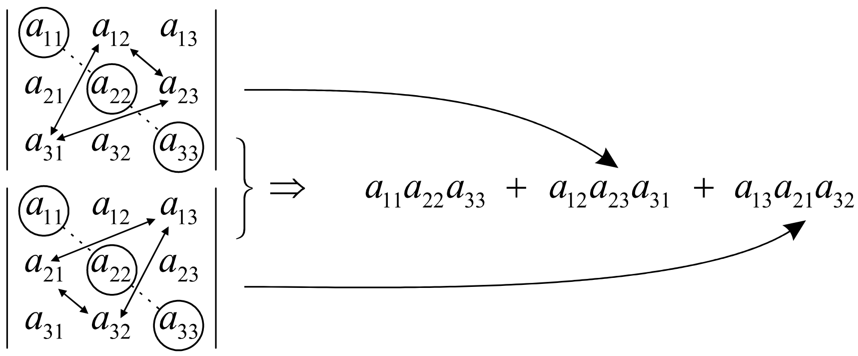
Фиг.8б)

<u>Коментар:</u> Въвеждането на двата спомагателни стълба (Фиг.8а)) чрез прехвърляне на първи и втори стълб, позволява да конструираме по още две двойки линии (от по 3 елемента), съответно успоредни на двата основни диагонала.

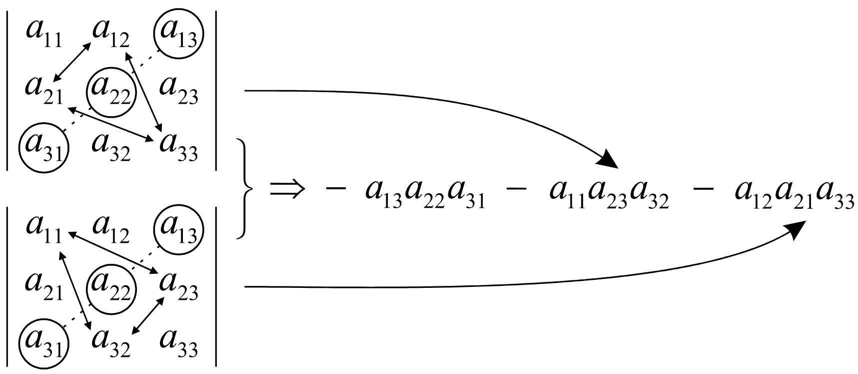
Сега, по дефиниция:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}. \tag{3.2}$$

Същия резултат ще получим и ако постъпим както на фиг.9 (по-долу).



Фиг.9а)



Фиг.9б)

Коментар: На фиг.9 елементите от спомагателните тройки са включени в триъгълници, с основи, успоредни на съответните основни диагонали. По тази причина правилото за определяне стойността на детерминанта от 3-ти ред, показано на фиг.9, се нарича *правило на триъгълниците* или *правило на Сарус.*

Забележка: Както ще се убедим (по-нататък) от извода на т.н. формули на Крамер, описаната по-горе евристична идея всъщност дава необходимата точна (от гледна точка на коректното решение на дадена тримерна система) стойност на детерминантата.

3.2. Детерминанти от n-ти ред

До дефиницията на (стойност на) детерминанта от n-ти ред ще стигнем след по-внимателно изследване на израза от (3.2).

а) *Анализ на 3-мерния случай: пермутации, инверсии, сигнатура.*

От израза в (3.2) се вижда, че при нареждане на първите индекси на елементите a_{ij} по големина, навсякъде в произведенията тройката на вторите индекси претърпява пренареждания. За повече яснота да обособим пренарежданията на вторите индекси в две условни групи (“плюсова” и “минусова”), съгласно (3.2), по следния начин

“+”: (1 2 3), (2 3 1), (3 1 2)
“–”: (3 2 1), (1 3 2), (2 1 3)

Фиг.10

Такива пренареждания ще наречем *пермутации* на наредената тройка (1 2 3). Самата тройка (1 2 3) е *нулевата* пермутация на себе си. На Фиг.10 всички дадени пермутации са различни – защото, от геометрична гледна точка, навсякъде имаме 3-мерни вектори с различни (целочислени) координати. Тук първият въпрос е дали това са точно всички пермутации (всяка взета по веднъж) на тройката (1 2 3). Ще отговорим като преброим пермутациите по начина от фиг.11 (по-долу):

$$(1)\begin{array}{l}\nearrow (1\,2\,3)\\ \\ \searrow (1\,3\,2)\end{array};\qquad (2)\begin{array}{l}\nearrow (2\,1\,3)\\ \\ \searrow (2\,3\,1)\end{array};\qquad (3)\begin{array}{l}\nearrow (3\,1\,2)\\ \\ \searrow (3\,2\,1)\end{array}.$$

Фиг.11

На фиг.11 сме се възползвали от най-простия начин да конструираме изчерпателно всички пермутации на тройката (1 2 3): като избираме всяко от числата 1, 2, 3 да бъде “водещ” елемент; тогава, предвид че от два елемента *a, b* пермутациите са точно 2 – (*a b*) и (*b a*), от всеки “водещ” елемент произтичат по 2 пермутации. Сравняването на резултатите от фиг.10 и фиг.11 показва, че на фиг.10 вече сме имали точно всички (6 на брой) пермутации на числата 1, 2, 3. В частност пермутациите (1 3 2), (3 2 1) и (2 3 1) от фиг.11 откриваме и на фиг.10 - съответно в “минусовата” и “плюсовата” група.

Следващият естествен въпрос е: От какво зависи появата на знак “–” пред втората половина събираеми в (3.2)? За да отговорим на въпроса, ще разширим гледната точка като най-напред формализираме понятието пермутация.

<u>Дефиниция</u> (Пермутация). Една наредена *n*-орка числа $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ наричаме *пермутация* на числата *1,2, ..., n* и използваме означението $(\alpha_1\, \alpha_2 \, ... \, \alpha_n)$, ако α_j е естествено число от множеството {1, 2, …, n}, $\forall j = 1 \div n$ и $\alpha_i \neq \alpha_j$, за всяка двойка $i \neq j,\ j = 1 \div n$.

По-общо, за пермутация на дадена наредена *n*-орка обекти $A_1, A_2, ..., A_n$ можем да говорим, когато имаме пермутация на индексите *1, 2, ...,n.*

<u>Дефиниция</u> (Инверсия). За дадена пермутация $(\alpha_1\, \alpha_2 \, ... \, \alpha_k \, ... \, \alpha_l \, ... \, \alpha_n)$ казваме, че между числата α_k и α_l има *инверсия* , ако $k < l$, но $\alpha_k > \alpha_l$.

Да преброим инверсиите в пермутациите от фиг. 10:

"+"		"–"	
(1 2 3)	– 0 инв.	(3 2 1)	– 3 инв.
(2 3 1)	– 2 инв.	(1 3 2)	– 1 инв.
(3 1 2)	– 2 инв.	(2 1 3)	– 1 инв.

Фиг. 12

<u>Коментар:</u> Да разгледаме напр. пермутациите (2 3 1), (3 2 1) и (1 3 2) от фиг.12. В (2 3 1) има инверсия между числата 2 и 1, и числата 3 и 1 (а между 2 и 3 – няма) – общо 2 инверсии. В (3 2 1) имаме инверсии между 3 и 2, 3 и 1,и 2 и 1,а в (1 3 2) – само между 3 и 2.

Дадена пермутация $(\alpha_1\,\alpha_2\,...\,\alpha_n)$ ще означаваме за краткост с α (или $\vec{\alpha}$*),* а с $[\alpha]$ (или $[\vec{\alpha}]$) – броя на инверсиите в пермутацията.

<u>Дефиниция</u> (Сигнатура). Числото $(-1)^{\alpha}$ (което очевидно е 1 или –1, според четността на числото $[\alpha]$) ще наричаме *сигнатура* на пермутацията α.

Сега е ясно, че знакът "–" във втората половина от събираемите от (3.2) се дължи на отрицателната сигнатура на пермутациите (3 2 1), (1 3 2), (2 1 3).

Поредният ключов въпрос е: колко са пермутациите на n дадени елемента? Да означим с P_n множеството от всички пермутации на числата *1, 2, ..., n* и нека p_n е броят на елементите на P_n (т.е – броят на пермутациите $(\alpha_1\,\alpha_2\,...\,\alpha_n)$). За конкретност най-напред да пресметнем p_4, като за целта образуваме пермутациите на числата *1, 2, 3, 4* – по схемата от фиг.11:

$$(1)\left\langle\begin{array}{l}(1\,2\,3\,4)\\(1\,2\,4\,3)\\(1\,3\,2\,4)\\(1\,3\,4\,2)\\(1\,4\,2\,3)\\(1\,4\,3\,2)\end{array}\right.;\quad(2)\left\langle\begin{array}{l}(2\,1\,3\,4)\\(2\,1\,4\,3)\\(2\,3\,1\,4)\\(2\,3\,4\,1)\\(2\,4\,1\,3)\\(2\,4\,3\,1)\end{array}\right.;\quad(3)\left\langle\begin{array}{l}(3\,1\,2\,4)\\(3\,1\,4\,2)\\(3\,2\,1\,4)\\(3\,2\,4\,1)\\(3\,4\,1\,2)\\(3\,4\,2\,1)\end{array}\right.;\quad(4)\left\langle\begin{array}{l}(4\,1\,2\,3)\\(4\,1\,3\,2)\\(4\,2\,1\,3)\\(4\,2\,3\,1)\\(4\,3\,1\,2)\\(4\,3\,2\,1)\end{array}\right.$$

Фиг. 13

От фиг. 11, 13 се вижда, че $p_3 = 6$, $p_4 = 4p_3 = 24$. Освен това обобщението, незабавно следващо от фиг. 13, е следното. Ако *m* е кое да е от числата $1,2,...,n$, за да получим всички пермутации от вида $(m\;\alpha_1\;\alpha_2\;\ldots\;\alpha_n)$, трябва да образуваме всевъзможните пермутации от елементите на множеството $\{1,2,\ldots,m-1,m+1,\ldots n\}$ (тези пермутации са p_{n-1} на брой) и към всяка от тях да добавим отпред числото *m.* От тук става ясно, че $p_n = np_{n-1}$; прилагайки горната формулата още $n-2$ пъти имаме: $p_n = n(n-1)p_{n-2} = n(n-1)(n-2)p_{n-3} = \ldots = n(n-1)(n-2)\ldots 3p_2$. Т.е. $p_n = 1.2.3\ldots n$.

Произведението $1.2.3\ldots n$ обикновено означаваме като $n!$ и четем “*ен факториел*”. Получихме, че

$$p_n = n! \qquad (3.3)$$

б) *Общият случай - детерминанта от n-ти ред.*

Ако Δ_A е детерминантата от (3.1), за стойността й *по дефиниция* полагаме

$$\Delta_A = \sum_{\alpha\in P_n} (-1)^{[\alpha]} \alpha_{1\alpha_1}\alpha_{2\alpha_2}\ldots\alpha_{n\alpha_n} \qquad (3.4)$$

Във формула (3.4) се сумират всевъзможните произведения (вж. в частност (3.2)) от вида $(-1)^{[\alpha]} \alpha_{1\alpha_1}\alpha_{2\alpha_2}\ldots\alpha_{n\alpha_n}$, които получаваме, когато “мултииндексът” $\alpha = \begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n\end{pmatrix}$ описва последователно всички елементи на множеството P_n.

3.3. Триъгълни детерминанти.

За елементите $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ на дадена детерминанта от *n*-ти ред казваме, че образуват *главния диагонал* на детерминантата.

Една детерминанта наричаме *триъгълна,* ако всички нейни елементи под или над главния диагонал са нули. В сила е следното

Свойство 3.1

Ако една детерминанта е триъгълна, тя е равна на произведението от диагоналните си елементи.

Доказателство. Тъй като в произведенията $\alpha_{1\alpha_1}\alpha_{2\alpha_2}\ldots\alpha_{n\alpha_n}$ (вж. (3.4)) участват само множители от различни редове и стълбове, то с изключение на произведението $\alpha_{11}\alpha_{22}\ldots\alpha_{nn}$, във всяко от останалите има множители α_{ij}, които не са от главния диагонал. Нека в произведението $\alpha_{1\alpha_1}\alpha_{2\alpha_2}\ldots\alpha_{n\alpha_n}$ например за множителя $\alpha_{k\alpha_k}$ имаме, че $\alpha_k < k$ $(1 < k < n)$ (тогава елементът $\alpha_{k\alpha_k}$ е в ляво от главния диагонал). Ако допуснем, че за всички елементи $\alpha_{m\alpha_m}, m = 1 \div k-1$ имаме $\alpha_m \le k-1$, то понеже и $\alpha_k \le k-1$ (предвид че $\alpha_k < k$), измежду числата $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ би имало съвпадащи (което е абсурд). Следователно за някое $l, 1 \le l \le k-1$, ще имаме, че $\alpha_k \ge k$ и следователно $l \le \alpha_l$ (от $l \le k-1 < k \le \alpha_l$); т.е. елементът $\alpha_{l\alpha_l}$ е в дясно от главния диагонал, докато $\alpha_{k\alpha_k}$ е в ляво. Но тогава поне един от тях е нула. Установихме, че всички събираеми от дясната част на (3.4), с изключение евентуално на $a_{11}a_{22}\ldots a_{nn}$, са нули и $\Delta_A = a_{11}a_{22}\ldots a_{nn}$.

Следващото твърдение се отнася за детерминанти от *n*-ти ред, изпълняващи условието (вж. фиг. 14а), по-долу).

$$a_{ij} = 0, i = 1 \div m, j = m+1 \div n \ (m < n). \qquad (3.5)$$

$$
\Delta = \begin{vmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} * & * & * \\ * & * & * \end{matrix} & \begin{bmatrix} a_{44} & a_{45} \\ a_{54} & a_{55} \end{bmatrix} \end{vmatrix}; \quad \Delta^t = \begin{vmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} & \begin{matrix} * & * \\ * & * \\ * & * \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} & \begin{bmatrix} a_{44} & a_{54} \\ a_{45} & a_{55} \end{bmatrix} \end{vmatrix}
$$

фиг. 14а) фиг.14б)

На фиг.14а) е дадена детерминанта Δ от 5-ти ред, удовлетворяваща (3.5) с $m=3$, а на фиг. 14б) – нейната "транспонирана" детерминанта. По аналогия с матриците, *транспонирана детерминанта* (на дадена детерминанта Δ) наричаме детерминантата, чиито редове (стълбове) са стълбовете (редовете) на Δ, наредени по възходящ ред на номерата; транспонираната детерминанта означаваме обикновено с Δ^{t} (или с Δ^{T}; използва се и означението Δ'). От равенството $\Delta^{\mathrm{t}} = \Delta$ (което ще установим по-късно) следва, че твърдението по-долу (Свойство 3.2), отнасящо се за детерминанти със структура като на фиг. 14а), е автоматично валидно и за детерминанти със структура като на фиг. 14б).

Свойство 3.2.

Ако Δ е детерминанта с елементи $a_{ij}, i=1\div n, j=1\div n$, удовлетворяваща (3.5) и Δ_1, Δ_2 са детерминантите, съответно от ред m и $n-m$, образувани от елементите на Δ по начина от фиг. 15 (по-долу), то $\Delta = \Delta_1 \Delta_2$.

$$
\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix}; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{m+1,m+1} & a_{m+1,m+2} & \cdots & a_{m+1,n} \\ a_{m+2,m+1} & a_{m+2,m+2} & \cdots & a_{m+2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,m+1} & a_{n,m+2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}
$$

Фиг. 15

Доказателство (вж. Също [Н.Обр]). Ще анализираме общия член $(-1)^{[\alpha]} a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \dots a_{n\alpha_n}$ на сумата от (3.4). Мултииндексът $\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}$ ще представим във вида $\alpha = \begin{pmatrix} \alpha' & \alpha'' \end{pmatrix}$, където $\alpha' = (\alpha_1\ \alpha_2 \dots \alpha_m)$, $\alpha'' = (\alpha_{m+1}\ \alpha_{m+2} \dots \alpha_n)$. Ако в произведението $a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \dots a_{m\alpha_m}$ някои от индексите $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ е по-голям от *m,* например $\alpha_k > m\ (1 \le k \le m)$, то $a_{k\alpha_k} = 0$ (предвид (3.5)) и съответното събираемо $(-1)^{[\alpha]} a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \dots a_{n\alpha_n}$ е нула. Следователно всички ненулеви (в горния смисъл) събираеми в израза за Δ от (3.4) ще получим, оставяйки мултииндекса α да се мени така в множеството P_n, че $\alpha' \in P_m$, но тогава α'' може да описва само множеството P''_{n-m} – от всевъзможните пермутации на числата $m+1, m+2, \dots, n$. Същевременно имаме, че $[\alpha] = [\alpha'] + [\alpha'']$ и следователно в разглеждания случай (при условие (3.5)) за детерминантата Δ получаваме:

$$\Delta = \sum_{\alpha' \in P_m, \alpha'' \in P''_{n-m}} (-1)^{[\alpha']} a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \ldots a_{m\alpha_m} . (-1)^{[\alpha'']} a_{m+1\alpha_{m+1}} a_{m+2\alpha_{m+2}} \ldots a_{n\alpha_n} \tag{3.6}$$

За всяка фиксирана пермутация α'' сумата на членовете от дясната част на (3.6), съдържащи множителя $(-1)^{[\alpha'']} a_{m+1\alpha_{m+1}} a_{m+2\alpha_{m+2}} \ldots a_{n\alpha_n}$ е равна на $\Delta_1 . (-1)^{[\alpha'']} a_{m+1\alpha_{m+1}} a_{m+2\alpha_{m+2}} \ldots a_{n\alpha_n}$, понеже (съгласно дефиницията (3.4)) $\Delta_1 = \sum_{\alpha' \in P_m} (-1)^{[\alpha']} a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \ldots a_{m\alpha_m}$ Тогава (3.6) добива вида

$$\Delta = \Delta_1 . \sum_{\alpha'' \in P''_{n-m}} (-1)^{[\alpha'']} a_{m+1\alpha_{m+1}} a_{m+2\alpha_{m+2}} \ldots a_{n\alpha_n} \tag{3.7}$$

За удобство да означим $b_{ij} = a_{m+i,m+j}, \beta_j = \alpha_{m+j}, i, j = 1 \div n-m$ и да вземем предвид, че $[\alpha''] = [\beta]$, където $\beta = (\beta_1 \ \beta_2 \ \ldots \ \beta_{n-m})$; това е така, понеже очевидно броят на пермутациите на числата $m+1, m+2, \ldots n$ (които са $n-m$ на брой) съвпада с този за числата $1, 2, \ldots n-m$. Сега сумата $\sum_{\alpha'' \in P''_{n-m}}$ от дясната част на (3.7) добива вида $\sum (-1)^{[\beta]} b_{1\beta_1} b_{2\beta_2} \ldots b_{n-m,\beta_{n-m}}$. Последното, съгласно дефиницията от (3.4), е стойността на детерминантата с елементи b_{ij}; но това е детерминантата Δ_2. Така от (3.7) получаваме желаното: $\Delta = \Delta_1 \Delta_2$.

Квазитриъгълни детерминанти.

Детерминантата Δ от Свойство 3.1 (и нейната транспонирана) можем да наричаме *квазитриъгълна с два диагонални макроелемента* – детерминантите Δ_1, Δ_2. По-общ тип конструкция ще получим, ако някой от диагоналните макроелементи, напр. Δ_1, на свой ред удовлетворява условие от типа (3.5), превръщайки се по този начин в квазитриъгълна детерминанта (с два диагонални макроелемента). Тогава самата детерминанта Δ би имала общо три диагонални макроелемента. В общия случай можем да имаме *квазитриъгълна детерминанта* Δ *от n-ти ред с* k $(k \le n)$ *диагонални макроелементи* (вж. фиг 16 по-долу) Δ_1, Δ_2, …, Δ_k, с нулеви елементи над (или под, предвид равенството $\Delta = \Delta^t$) главния диагонал и непринадлежащи на никоя от Δ_1, Δ_2, …, Δ_k; макроелементът $\Delta_j, j = 1 \div k$, е n_j-мерна детерминанта, като $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$. Сега, прилагайки неколкократно Свойство 3.2, стигаме до обобщението

$$\Delta = \Delta_1 \Delta_2 \ldots \Delta_k . \tag{3.8}$$

$$\begin{vmatrix} \Delta_1 & & & & & \\ & \Delta_2 & & & 0 & \\ & & \Delta_3 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & (a_{ij}) & & & \Delta_{k-1} & \\ & & & & & \Delta_k \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} \Delta_1 & & & & & \\ & \Delta_2 & & & (a_{ij}) & \\ & & \Delta_3 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & 0 & & & \Delta_{k-1} & \\ & & & & & \Delta_k \end{vmatrix}$$

а) б)

Фиг. 16

В частност, при $k = n$ имаме $\Delta_j = a_{jj}\ (k_j = 1), \forall j = 1 \div n$, и Δ е “обикновена” триъгълна детерминанта.

3.4. Основни свойства на детерминантите.

Ще разгледаме една група свойства, представляващи фактически правила за пресмятане на детерминанти.

1). *Транспониранатa* на дадена детерминанта е равна на самата детерминанта, т.е. $\Delta^t = \Delta$

За *доказателството* на свойството ще имаме предвид (вж. формула (3.4)) че, ако общият член от дефиниционната формула за Δ^t е $(-1)^{[\alpha]} a^t_{1\alpha_1} a^t_{2\alpha_2} \dots a^t_{n\alpha_n}$, то

$$(-1)^{[\alpha]} a^t_{1\alpha_1} a^t_{2\alpha_2} \dots a^t_{n\alpha_n} = (-1)^{[\alpha]} a_{\alpha_1 1} a_{\alpha_2 2} \dots a_{\alpha_n n} \qquad (3.9)$$

Ще преработим дясната част на (3.9) като пренаредим множителите в произведението $\alpha_{\alpha_1 1}\alpha_{\alpha_2 2} \dots \alpha_{\alpha_n n}$ и проследим промяната в пермутациите на първите и вторите им индекси. Матрицата от тези пермутации има вида

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & \alpha_{l-1} & \alpha_l & \dots & \alpha_n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & l-1 & l & \dots & n \end{pmatrix}. \qquad (3.10)$$

(Такива матрици често пъти се наричат *субституции,* вж. напр. [А.К-ш].) Започвайки от първия множител $a_{\alpha_1 1}$, в случай, че между α_1 и α_2 няма инверсия, т.е. $\alpha_1 < \alpha_2$, оставяме $a_{\alpha_1 1}$ на място. Ако има инверсия между α_1 и $\alpha_2\,(\alpha_1 > \alpha_2)$, разместваме $a_{\alpha_1 1}$ и $a_{\alpha_2 2}$ и продължаваме нататък с “едностъпкови” размествания, в случай че между α_1 и всяко от числата $\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{l-1}$ има инверсия; процесът спира, ако между α_1 и α_l, $2 \le l \le n$ няма инверсия. Сега множителят $a_{\alpha_1 1}$ е поставен между $a_{\alpha_{l-1}, l-1}$ и $a_{\alpha_l, l}$, а матрицата (3.10) е добила вида:

$$\begin{pmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & \alpha_{l-1} & \alpha_1 & \alpha_l & \dots & \alpha_n \\ 2 & 3 & \dots & l-1 & 1 & l & \dots & n \end{pmatrix}. \qquad (3.11)$$

Разбира се, когато $\alpha_1 = n$, едностъпковото разместване продължава, докато числото $\alpha_1 = n$ отиде най-отзад в пермутацията на индексите α_j. Тогава за (3.11) имаме частния случай

$$\begin{pmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & \alpha_{l-1} & \alpha_l & \dots & \alpha_n & \alpha_1 \\ 2 & 3 & \dots & l-1 & l & \dots & n & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.12)$$

а произведението $a_{\alpha_1 1} a_{\alpha_2 2} \dots a_{\alpha_n n}$ е във формата $a_{\alpha_2 2} \dots a_{\alpha_n n} a_{\alpha_1 1}$, тъй като при споменатите едностъпкови размествания на елементите $a_{\alpha_j j}$ всъщност разместваме последователно стълбовете на матрицата. При това, когато първият стълб от (3.10) вече се намира в позицията от (3.11) (в частност - от (3.12)) , всички инверсии, в които участва α_1 са елиминирани (анулирани), същевременно са възникнали точно толкова инверсии в пермутацията на вторите индекси: в n-орката числа от втори ред на (3.11) числото 1 е в инверсия с всяко от числата $2, 3, \dots, l-1$. Приключвайки по гореуказания начин с преместването на множителя $a_{\alpha_1 1}$, прилагаме същата процедура за $a_{\alpha_2 2}$ и т.н. – до последния $a_{\alpha_n n}$. В края на този процес ще са анулирани всички инверсии, в които е участвал всеки от индексите α_j (както стана ясно от анализа на случая с α_1); тогава пермутацията $(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n)$ се е трансформирала в нулевата, $(1\,2 \dots n)$. Същевременно изходната нулева пермутация на вторите индекси в произведението $a_{\alpha_1 1} a_{a_2 2} \dots a_{\alpha_n n}$ се е трансформирала в пермутация $\beta = (\beta_1 \beta_2 \dots \beta_n)$ с брой на инверсиите $[\beta] = [\alpha]$. Следователно (вж. дясната част на (3.9)) $(-1)^{[\alpha]} a_{\alpha_1 1} a_{\alpha_2 2} \dots a_{\alpha_n n} = (-1)^{[\beta]} a_{\beta_1 1} a_{\beta_2 2} \dots a_{\beta_n n}$ добива вида

$$(-1)^{[\alpha]} a^t_{1\alpha_1} a^t_{2\alpha_2} \dots a^t_{n\alpha_n} = (-1)^{[\beta]} a_{\beta_1 1} a_{\beta_2 2} \dots a_{\beta_n n}. \quad (3.13)$$

В описания процес на анулиране на инверсиите в дадена пермутация $\alpha = (\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n)$ е ясно, че на всяка пермутация α (на първите индекси в $a_{\alpha_1 1} a_{\alpha_2 2} \dots a_{\alpha_n n}$) съответства единствена пермутация β (на вторите индекси), такава че $[\beta] = [\alpha]$. Следователно, ако в (3.13) оставим мултииндекса α да опише множеството P_n и сумираме, ще получим равенството

$$\sum_{\alpha \in P_n} (-1)^{[\alpha]} a^t_{1\alpha_1} a^t_{2\alpha_2} \dots a^t_{n\alpha_n} = \sum_{\beta \in P_n} (-1)^{[\beta]} a_{1\beta_1} a_{2\beta_2} \dots a_{n\beta_n}\,, \quad (3.14)$$

предвид, че тогава и мултииндексът β ще опише P_n. Равенството (3.14) (вж. също (3.4)), означава, че $\Delta^t = \Delta$.

Коментар:

Свойство 1) показва, че всички други свойства на детерминантите, валидни “по редове”, са валидни и “по стълбове” (и обратно).

2). *При разместване на редове (стълбове), детерминантата променя само знака си* (когато не е нула); т.е., ако Δ е дадена детерминанта и Δ' е детерминантата, получена от Δ след разместването на два реда, то $\Delta' = -\Delta$.

Доказателство. Най-напред ще разгледаме случая на два съседни реда, k-ти и k+1-ви. От дефиниционната формула (3.4) е ясно, че общият член в представянето на Δ' има следния вид

$$(-1)^{[\alpha]} a'_{1\alpha_1} a'_{2\alpha_2} \ldots a'_{k\alpha_k} a'_{k+1\alpha_{k+1}} \ldots a'_{n\alpha_n} . \quad (3.15)$$

Понеже Δ' получихме от Δ след разместването на споменатите два реда (ср. (3.15) с общия член от (3.4)), в сила е равенството:

$$(-1)^{[\alpha]} a'_{1\alpha_1} a'_{2\alpha_2} \ldots a'_{k\alpha_k} a'_{k+1\alpha_{k+1}} \ldots a'_{n\alpha_n} = (-1)^{[\alpha]} a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \ldots a_{k\alpha_k} a_{k+1\alpha_{k+1}} \ldots a_{n\alpha_n} . \ (3.16)$$

В (3.16) сме взели предвид, че

$a'_{ij} = a_{ij}, \forall i, j : 1 \le i \le n, i \ne k, k+1, 1 \le j \le n, a'_{k,j} = a_{k+1,j}$ (и $a'_{k+1,j} = a_{k,j}$), $\forall j = 1 \div n$.

След разместване на множителите a_{k+1,α_k} и $a_{k,\alpha_{k+1}}$ в дясната част на (3.16) и почленно умножение на (3.16) с $(-1)^{[\alpha]}$, получаваме:

$$(-1)^{[\alpha]} a'_{1\alpha_1} a'_{2\alpha_2} \ldots a'_{k,\alpha_k} a'_{k+1,\alpha_{k+1}} \ldots a'_{n\alpha_n} = (-1)^{[\alpha]} a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \ldots a_{k,\alpha_{k+1}} a_{k+1,\alpha_k} \ldots a_{n\alpha_n} . \quad (3.17)$$

Да означим с γ пермутацията $(\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_{k+1}\alpha_k \ldots \alpha_n)$, т.е. ако $\gamma = (\gamma_1\gamma_2 \ldots \gamma_k\gamma_{k+1} \ldots \gamma_n)$, имаме $\gamma_j = \alpha_j, \forall j = 1 \div n, j \ne k, k+1$ и $\gamma_k = \alpha_{k+1}, \gamma_{k+1} = \alpha_k$. Очевидно броят на инверсиите в пермутацията $(\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_k\alpha_{k+1} \ldots \alpha_n)$ е точно с единица различен от този брой в пермутацията $\gamma = (\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_{k+1}\alpha_k \ldots \alpha_n)$ и следователно $(-1)^{[\alpha]} = -(-1)^{[\gamma]}$. Сега дясната част на (3.17) можем да презапишем като

$$-(-1)^{[\gamma]} a_{1\gamma_1} a_{2\gamma_2} \ldots a_{k,\gamma_k} a_{k+1,\gamma_{k+1}} \ldots a_{n\gamma_n} \quad (3.18)$$

Ясно е, че от всяка пермутация а чрез разместването на два индекса с фиксирани номера-в случая k-ти и k+1-ви (такива операции се наричат *транспозиции)* се получава точно по една пермутация от типа γ. Следователно, когато оставим мултииндекса α да опише множеството P_n, то и мултииндексът γ ще опише P_n, преминавайки по веднъж през всяка пермутация от P_n. Сумирайки в (3.17), след предварително заместване от (3.18) в дясната част на (3.17), установяваме желаното равенство:

$$\Delta' = \sum_{\alpha \in P_n} (-1)^{[\alpha]} a'_{1\alpha_1} a'_{2\alpha_2} \ldots a'_{n\alpha_n} = -\sum_{\gamma \in P_n} (-1)^{[\gamma]} a_{1\gamma_1} a_{2\gamma_2} \ldots a_{n\gamma_n} = -\Delta . \quad (3.19)$$

Общият случай, когато сме разместили k-ти и l-ти ред, $k < l$ не е по-сложен от вече разгледания: тогава имаме следното

$$a'_{1\alpha_1}a'_{2\alpha_2}\dots a'_{k\alpha_k}\dots a'_{l\alpha_l}\dots a'_{n\alpha_n} = a_{1\alpha_1}a_{2\alpha_2}\dots a_{k-1,\alpha_{k-1}}a_{l\alpha_k}a_{k+1,\alpha_{k+1}}\dots a_{l-1,\alpha_{l-1}}a_{k\alpha_l}a_{l+1,\alpha_{l+1}}\dots a_{n\alpha_n}$$

. (3.20)

В дясната част на (3.20) разместваме множителите $a_{l\alpha_k}$ и $a_{k\alpha_l}$, и сравняваме пермутациите $\alpha = (\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{k-1}\alpha_k\alpha_{k+1}\dots\alpha_{l-1}\alpha_l\alpha_{l+1}\dots\alpha_n)$ и $\gamma = (\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{k-1}\alpha_l\alpha_{k+1}\dots\alpha_{l-1}\alpha_k\alpha_{l+1}\dots\alpha_n)$ от вторите индекси на множителите съответно от лявата и дясната част (след споменатото разместване) на (3.20). Тъй като пермутацията γ е получена от α чрез транспозицията $\alpha_k \leftrightarrow \alpha_l$, ясно е, че изменение в броя на инверсиите $[\alpha]$ е настъпило само в "участъка" $(\alpha_k\alpha_{k+1}\dots\alpha_{l-1}\alpha_l)$, който е добил вида $(\alpha_l\alpha_{k+1}\dots\alpha_{l-1}\alpha_k)$ и за да пресметнем разликата $[\gamma]-[\alpha]$, трябва да пресметнем разликата между броя на инверсиите във всяка от групите индекси $(\alpha_k\alpha_{k+1}\dots\alpha_{l-1}\alpha_l)$ и $(\alpha_l\alpha_{k+1}\dots\alpha_{l-1}\alpha_k)$. При това е достатъчно да разгледаме само инверсиите, в които участват числата α_k и α_l. Нека в изходното "състояние" $(\alpha_k\alpha_{k+1}\dots\alpha_{l-1}\alpha_l)$ броят на инверсиите на α_k спрямо числата $\alpha_{k+1},\alpha_{k+2},\dots\alpha_{l-1}$ е n', а този на α_l спрямо същите числата е n'', където $n', n'' \le l-k-1$. Това означава, че числото α_k е в инверсия с n' на брой от числата $\alpha_{k+1},\alpha_{k+2},\dots\alpha_{l-1}$, а с останалите $l-k-1-n'$ – не е в инверсия; аналогично α_l е в инверсия с n'' от тези числа и не е в инверсия с останалите $l-k-1-n''$ от тях. След транспозицията $\alpha_k \leftrightarrow \alpha_l$ в новото състояние $(\alpha_l\alpha_{k+1}\dots\alpha_{l-1}\alpha_k)$ числото α_k очевидно вече не е в инверсия с онези n' елемента $a_j \in \{\alpha_{k+1},\alpha_{k+2},\dots\alpha_{l-1}\}$, с които беше в инверсия преди транспозицията и същевременно се оказва в инверсия с останалите $l-k-1-n'$ елементи; аналогично в състоянието $(\alpha_l\alpha_{k+1}\dots\alpha_{l-1}\alpha_k)$ числото α_l е в инверсия с $l-k-1-n''$ на брой числа от множеството $\{\alpha_{k+1},\alpha_{k+2},\dots,\alpha_{l-1}\}$. Сега за да пресметнем окончателно разликата $d_{k,l} \equiv [(\alpha_l\alpha_{k+l}\dots\alpha_{l-1}\alpha_k)]-[(\alpha_k\alpha_{k+1}\dots\alpha_{l-1}\alpha_l)]$ (в броя на инверсиите съответно на състоянията $(\alpha_l\alpha_{k+1}\dots\alpha_{l-1}\alpha_k)$ и $(\alpha_k\alpha_{k+1}\dots\alpha_{l-1}\alpha_l)$, остава да вземем предвид, че в изходното състояние числата α_k,α_l или са били в инверсия и тогава $d_{k,l} = l-k-1-n'+l-k-1-n''-(n'+n''+1)$, т.е.

$$d_{k,l} = 2(l-k-1-n'-n'')-1, \qquad (3.21)$$

или не са били в инверсия, и тогава в новото състояние попадат в инверсия, при което $d_{k,l} = l-k-1-n'+l-k-1-n''+1-(n'+n'')$, т.е.

$$d_{k,l} = 2(l-k-1-n'-n'')+1\,. \qquad (3.22)$$

Да означим за удобство с m цялото число $l-k-1-n'-n''$; тогава $d_{k,l} = 2m \pm 1$, съгласно (3.21), (3.22), т.е. $d_{k,l}$ е нечетно число. Следователно $(-1)^{[\alpha]} = -(-1)^{[\gamma]}$. От тук и (3.20) имаме, че

$$(-1)^{[\alpha]} a'_{1\alpha_1} a'_{2\alpha_2} \dots a'_{n\alpha_n} = -(-1)^{[\gamma]} a_{1\gamma_1} a_{2\gamma_2} \dots a_{n\gamma_n}, \qquad (3.23)$$

където $\gamma_i = \alpha_i, i \neq k, l, \gamma_k = \alpha_l, \gamma_l = \alpha_k$. След сумиране в (3.23) по $\alpha \in P_n$ (тогава и γ описва еднократно P_n) получаваме желаното равенство и в общия случай (вж. (3.19)).

Като полезно допълнение ще отбележим, че общият случай може да се получи като следствие от частния случай (разместване на съседни редове или стълбове), по следния начин (фиг. 17 по-долу).

$$\begin{array}{r|cccc|l} & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ \text{k-ти} & a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} & \\ & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ \text{l-ти} & a_{l1} & a_{l2} & \dots & a_{ln} & \uparrow \\ & \dots & \dots & \dots & \dots & \end{array} \quad \to \quad \begin{array}{r|cccc|l} & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ \text{k-ти} & a_{l1} & a_{l2} & \dots & a_{ln} & \\ & a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} & \text{k+1-ви} \\ & \dots & \dots & \dots & \dots & \downarrow \\ \text{l-ти} & a_{l-1,1} & a_{l-1,2} & \dots & a_{l-1,n} & \\ & \dots & \dots & \dots & \dots & \end{array}$$

а) б)

$$\to \quad \begin{array}{r|cccc|} & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \text{k-ти} & a_{l1} & a_{l2} & \dots & a_{ln} \\ & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \text{l-ти} & a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \\ & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}$$

в)

Фиг. 17

На фиг. 17а) детерминантата Δ е в изходно състояние като сме започнали да придвижваме l-тия й ред ($l > k$) в посока “нагоре” с последователни едностъпкови размествания (с по едно “стъпало”) на съседни редове, докато l-тия ред се изкачи на k-то “ниво”, отмествайки k-тия ред на k+1-во “ниво” (вж. фиг. 17б)). Детерминантата $\Delta_{б)}$ от междинното състояние от фиг. 17б) е получена от изходното състояние $\Delta_a = \Delta$ след $l-k$ на брой последователни размествания на съседни редове, т.е. след $l-k$ промени на знака, значи $\Delta_{б)} = (-1)^{l-k}.\Delta$. Сега, в междинното състояние, фиг. 17б), започваме едностъпково придвижване в посока “надолу” на бившия k-ти ред, чието изходно разположение обаче е на $k+1$-во “ниво”. Очевидно предстоят $l-(k+1)$ на брой стъпки “надолу”, докато получим окончателното състояние, фиг. 17в). Следователно

$$\Delta' = \Delta_{в)} = (-1)^{l-k-1}.\Delta_{б)}, \text{ т.е. } \Delta' = (-1)^{l-k-1}.(-1)^{l-k}.\Delta = (-1)^{2(l-k)-1}.\Delta = -\Delta,$$

което потвърждава вече установения общ резултат.

3). *Ако два реда (стълба) на една детерминанта са еднакви, детерминантата е нула.*

Най-краткото *доказателство* на това свойство се получава като следствие от Свойство 2): Нека например *k*-ти и *l*-ти ред на дадена детерминанта Δ са еднакви и Δ' е детерминантата, получена от Δ след разместването на двата еднакви реда. Тогава, от една страна $\Delta' = \Delta$ (защото Δ' и Δ са една и съща детерминанта, поради еднаквостта на *k*-ти и *l*-ти ред), а от друга: $\Delta' = -\Delta$ (по Свойство 2)). Следователно $\Delta = -\Delta$, т.е. $2\Delta = 0$, т.е. $\Delta = 0$.

4). *Развиване (представяне, разлагане) на детерминанта по елементите на даден ред (стълб).*

Във всички събираеми във формула (3.4) да проследим участието например на елементите от *k*-ти ред на дадена детерминанта Δ, правейки приведение последователно по множителите a_{k1}, a_{k2}, и т.н. до a_{kn}. По този начин очевидно можем да презапишем (3.4) във вида

$$\Delta = a_{k1}(\ldots) + a_{k2}(\ldots) + \ldots + a_{kn}(\ldots),$$

след изваждане пред скоби на съответния от елементите a_{kl} $(l = 1 \div n)$ от всички произведения $a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \ldots a_{n\alpha_n}$, в които a_{kl} участва. Означавайки сумите в скобите по-горе съответно с $A_{k1}, A_{k2}, \ldots A_{kn}$, от (3.4) получаваме

$$\Delta = a_{k1}A_{k1} + a_{k2}A_{k2} + \ldots + a_{kn}A_{kn} \qquad (3.24)$$

За всяко $l = 1 \div n$ величината A_{kl} е сума от произведения от по $n-1$ елемента, от вида $(-1)^{[\alpha]} a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \ldots a_{k-1,\alpha_{k-1}} a_{k+1,\alpha_{k+1}} \ldots a_{n\alpha_n}$, като в никое от произведенията не участват елементи от *k*-ти ред и *l*-ти стълб.

$$D_{k,l}(\Delta) = \begin{array}{cccc} \begin{bmatrix} & & \\ & (a_{ij}) & \\ & & \end{bmatrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{matrix} & \begin{bmatrix} & & \\ & (a_{ij}) & \\ & & \end{bmatrix} & \\ 0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad 0 & a_{kl} & 0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad 0 & \text{k-ти} \\ \begin{bmatrix} & & \\ & (a_{ij}) & \\ & & \end{bmatrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{matrix} & \begin{bmatrix} & & \\ & (a_{ij}) & \\ & & \end{bmatrix} & \end{array}$$

Фиг. 18

Това означава, че ако за спомагателната детерминанта $D_{k,l}(\Delta)$ (вж. фиг. 18) от *n*-ти ред, получена от Δ, приложим разлагането (3.24), ще получим, че

$D_{k,l}(\Delta) = a_{kl}.A_{kl}$. (В $D_{k,l}(\Delta)$) всички елементите от k-ти ред и l-ти стълб, с изключение евентуално на a_{kl}, са нули, а всички останали са съответните елементи a_{ij} на Δ.) Да придвижим k-тия ред на $D_{k,l}(\Delta)$ нагоре, докато стане първи, а l-тия й стълб наляво (докато стане първи) – с последователни едностъпкови разместования с поредния ред (стълб). Така от $D_{k,l}(\Delta)$ получаваме нова детерминанта

$$\begin{array}{c} \downarrow \text{ бивш } l\text{-ти} \\ \Delta_{kl} = \left\| \begin{matrix} \begin{bmatrix} (a_{ij}) \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} (a_{ij}) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} (a_{ij}) \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} (a_{ij}) \end{bmatrix} \end{matrix} \right\| \text{бивш k-ти}, \end{array}$$

Фиг. 19.

$$D^*_{k,l}(\Delta) = \begin{vmatrix} a_{kl} & 0 \quad 0 \quad \cdots \quad \cdots \quad 0 \\ 0 & \\ 0 & \\ \vdots & \Delta_{kl} \\ \vdots & \\ 0 & \end{vmatrix}$$

$D^*_{k,l}(\Delta)$ (вж. фиг.19). Новополучената детерминанта е квазитриъгълна и, предвид (3.8), имаме: $D^*_{k,l}(\Delta) = a_{k,l}.\Delta_{k,l}$. Тук $\Delta_{k,l}$ е детерминанта от $n-1$-ви ред (ср. с фиг. 18), която е получена от Δ след зачертаване (отстраняване) на k-тия ред и l-тия стълб на Δ. От друга страна, от Свойство 2) следва, че $D_{k,l}(\Delta) = (-1)^{k-1}.(-1)^{l-1}.D^*_{k,l}(\Delta)$, т.е. $D_{k,l}(\Delta) = (-1)^{k+1}.D^*_{k,l}(\Delta) = (-1)^{k+1}.a_{kl}\Delta_{kl}$. Сравнявайки последното с равенството $D_{k,l}(\Delta) = a_{kl}A_{kl}$ (получено по-горе), установяваме:

$$A_{kl} = (-1)^{k+1}\Delta_{kl}, k, l = 1 \div n. \qquad (3.25)$$

Величината A_{ij} се нарича *адюнгирано количество* или *алгебрично допълнение* (cofactor) на елемента $a_{ij}, i, j = 1 \div n$. Формула (3.24), съвместно с (3.25), е известна като *Теорема* (*правило*) *на Лаплас* за развиване на детерминанта по елементите на даден ред и адюнгираните им количества. Детерминантите Δ_{ij} са типичен случай на "поддетерминанти" на Δ от $n-1$-ви ред. Разбира се, можем да имаме "поддетерминанти" от всеки ред $k, 1 \le k \le n-1$, предвид следната по-обща

Дефиниция. За дадена детерминанта Δ от n-ти ред всяка детерминанта $\Delta_k(\Delta)$ от k-ти ред, $1 \le k \le n-1$, с елементи, получени от пресичането на призволни k реда и k стълба на Δ, наричаме *поддетерминанта* или *минор* (от k-ти ред) на Δ.

Елементите на $\Delta_k(\Delta)$ (те са част от елементите α_{ij} на Δ) са наредени в редове и стълбове по възходящ ред съответно на първите и вторите им индекси.

Важно допълнение на разлагането (3.24) е следното равенство:

$$a_{k1}A_{l1}+a_{k2}A_{l2}+\dots a_{kn}A_{ln}=0, \forall k,l: k\neq l, 1\leq k,l\leq n\,. \quad (3.26)$$

За да се убедим във валидността на (3.26), да подменим l-тия ред на дадена детерминанта Δ, поставяйки там произволна n-орка параметри $\vec{p}=(p_1,p_2,\dots,p_n)$. По този начин получаваме детерминантата

$$\Delta(\vec{p})=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \leftarrow \text{l-ти} \\ \\ \\ \end{array}$$

Фиг.20.

Развивайки $\Delta(\vec{p})$ по нейния l-ти ред, получаваме:

$$\Delta(\vec{p})=p_1A_{l1}+p_2A_{l2}+\dots+p_nA_{l,n}\,. \quad (3.27)$$

<u>Забележка:</u> Адюнгираните количества $A_{lk}, k=1\div n$, от (3.27) са идентични с тези за детерминантата Δ, понеже елементите a_{ij} на Δ са идентични с тези на $\Delta(\vec{p}), \forall i\neq l, i=1\div n, j=1\div n$, а в A_{lk} не участват елементи от l-ти ред.

При $\vec{p}=\vec{a}_k\equiv(a_{k1},a_{k2},\dots,a_{kn})$ от (3.27) следва

$$\Delta(\vec{a}_k)=a_{k1}A_{l1}+a_{k2}A_{l2}+\dots+a_{kn}A_{ln}\,,$$

същевременно от фиг.20 се вижда, че в детерминантата $\Delta(\vec{a}_k)$ k-тия и l-тия ред са еднакви, т.е. $\Delta(\vec{a}_k)=0$ (съгласно свойство 3)), с което равенството (3.26) е доказано. (Символът “$\equiv$” означава тъждествено равенство или равенство по дефиниция, в случая по-горе – равенство по дефиниция.)

От свойство 1) е ясно, че правилото на Лаплас и неговото допълнение са в сила и по стълбове, т.е.

$$\begin{aligned} &a)\ \Delta=a_{1k}A_{1k}+a_{2k}A_{2k}+\dots+a_{nk}A_{nk}, \forall k, 1\leq k\leq n \\ &б)\ 0=a_{1k}A_{1l}+a_{2k}\,A_{2l}+\dots+a_{nk}A_{nl}, k\neq l \end{aligned} \quad (3.28)$$

5) *Нулев ред (стълб): ако една детерминанта има ред (стълб) само от нули, тя е нула.*

Това свойство е очевидно следствие от правилото на Лаплас (вж. (3.24)): Ако например k-тият ред на една детерминанта се състои от нули, то, развивайки по него имаме, че

$$\Delta = 0.A_{k1} + 0.A_{k2} + \ldots + 0.A_{kn} = 0 .$$

Свойството следва също така очевидно още от дефиниционното равенство (3.4): във всяко от събираемите в (3.4), $(-1)^{[\alpha]} a_{1\alpha_1} \ldots a_{k-1,\alpha_{k-1}} .0. a_{k+1,\alpha_{k+1}} \ldots a_{n,a_n}$, има нулев множител.

В следващите две свойства ще установим, че *умножението на детерминанта с число и сумирането на две детерминанти от n- ти ред* се състоят съответно в поелементното умножаване с числото само на един (произволен) ред или стълб и поелементното сумиране само на елементите от ред (стълб) с един и същ номер в двете детерминанти, когато елементите на едната са идентични със съответните елементи на другата, за всички останали редове (стълбове).

6) *Една детерминанта* Δ *умножаваме по дадено число* ***c*** *по следния начин:*

$$c.\begin{vmatrix} [& (a_{ij}) &] \\ a_{k1} \quad a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ [& (a_{ij}) &] \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} [& (a_{ij}) &] \\ ca_{k1} \quad ca_{k2} & \cdots & ca_{kn} \\ [& (a_{ij}) &] \end{vmatrix}$$

Фиг.21.

Резултатът от умножението, показан на фиг.21 е $c.\Delta = \Delta_c$, където Δ_c е детерминантата от дясната част на фиг.21, а $\Delta = \det(a_{ij})$ е дадената детерминанта: изменение е настъпило само в един ред (k-тия), а всички останали редове остават непроменени. Ясно е, че правилото от фиг.21 е в сила и ако вместо с ред работим с произволен (l-ти) стълб: тогава $c.\Delta$ е стойността на детерминантата Δ^c, чиито l-ти стълб се състои от числата $ca_{1l}, ca_{2l}, \ldots, ca_{n,l}$, а останалите й стълбове са същите, както в Δ.

7) *Сумата на две детерминанти от n-ти ред* Δ', Δ'' *може да се представи като трета детерминанта* Δ *(от n-ти ред), когато редовете (стълбовете) на* Δ'*, с изключение евентуално на един, са идентични със съответните редове (стълбове) на* Δ''*; тогава сумирането извършваме по следния начин:*

$$\begin{vmatrix} [& (a_{ij}) &] \\ a'_{k1} & a'_{k2} \;\cdots\; & a'_{kn} \\ [& (a_{ij}) &] \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} [& (a_{ij}) &] \\ a''_{k1} & a''_{k2} \;\cdots\; & a''_{kn} \\ [& (a_{ij}) &] \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} [& (a_{ij}) &] \\ a'_{k1}+a''_{k1} & \ldots & a'_{kn}+a''_{kn} \\ [& (a_{ij}) &] \end{vmatrix}$$

$$\Delta' \qquad\qquad\qquad\qquad \Delta'' \qquad\qquad\qquad\qquad \Delta$$

Фиг. 22

Детерминантата Δ от фиг.22, където $\Delta = \Delta' + \Delta''$, има *k*-ти ред, който е поелементна сума от *k*-тите редове на Δ' и Δ''. Елементите α_{ij} от останалите редове ($i \neq k$), в коя да е от трите детерминанти $\Delta', \Delta'', \Delta$, съвпадат със съответните им елементи от другите две детерминанти. На фиг.22 е показано правилото за сумиране "по редове". Аналогична формулировка е в сила и "по стълбове": Ако за две детерминанти от *n*-ти ред Δ', Δ'' стълбовете на едната, с изключение евентуално на *l*-тия, са еднакви със съответните стълбове на другата, то $\Delta' + \Delta'' = \Delta$, където Δ е детерминантата (от *n*-ти ред), построена по следния начин: *l*-тият й стълб е поелементна сума на *l*-тите стълбове в Δ' и Δ'', а останалите й стълбове ($j \neq l$) са идентични със съответните им от Δ' и Δ''.

Правилата за умножение на детерминанта с число и сума на детерминанти можем да преформулираме и по още един начин:

6*) *От произволен* (*k*-ти) *ред или* (*l*-ти) *стълб на дадена детерминанта* Δ^* *можем да изнесем произволен множител* $c \neq 0$, *така че* $\Delta_* = c\Delta$. Тук Δ е детерминантата, чиито *k*-ти ред (*l*-ти стълб) е с елементи $a_{ij} = \dfrac{a^*_{ij}}{c}$, където a^*_{ij}, са елементите на Δ^* (от *k*-ти ред или *l*-ти стълб), а всички останали редове (стълбове) на Δ са идентични със съответните им от Δ^*.

7*) *Една детерминанта* Δ *можем да представим като сума на две други,* Δ', Δ'', т.е. $\Delta = \Delta' + \Delta''$, като елементите a_{ij} от произволен (*k*-ти) ред или (*l*-ти) стълб на Δ запишем във вида $a_{ij} = a'_{ij} + a''_{ij}$ (чрез произволна двойка числа a'_{ij}, a''_{ij}), а спомагателните детерминанти Δ', Δ'' конструираме по следния начин: *k*-тите редове (*l*-тите стълбове) на Δ' и Δ'' се състоят съответно от гореспоменатите числа a'_{ij} и a''_{ij}, а останалите им редове (стълбове) са идентични със съответните в Δ.

За да *докажем* свойствата 6), 7) (и вариантите им 6*), 7*)), можем да приложим както правилото на Лаплас, така и дефиниционното представяне (3.4). За свойство 6), от разлагането (3.24), приложено за детерминантата Δ_C, имаме:

$$\Delta_C = ca_{k1}.A_{k1} + ca_{k2}.A_{k2} + \ldots + ca_{kn}.A_{kn} = c(a_{k1}.A_{k1} + a_{k2}.A_{k2} + \ldots + a_{kn}.A_{kn}) = c\Delta.$$

$$\Delta_C = \sum_{\alpha \in P_n} (-1)^{[\alpha]} a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \ldots a_{k-1,\alpha_{k-1}} (c a_{k\alpha_k}) a_{k+1,\alpha_{k+1}} \ldots a_{n,\alpha_n} =$$

(От. (3.4)):
$$= c \sum_{\alpha \in P_n} (-1)^{[\alpha]} a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \ldots a_{k,\alpha_k} \ldots a_{n,\alpha_n} = c\Delta.)$$

За свойство 7) съответните пресмятания имат вида:

$$\begin{aligned}\Delta &= (a'_{k1} + a''_{k1})A_{k1} + (a'_{k2} + a''_{k2})A_{k2} + \ldots + (a'_{kn} + a''_{kn})A_{kn} = \\ &= a'_{k1}A_{k1} + a'_{k2}A_{k2} + \ldots a'_{kn}A_{kn} + a''_{k1}A_{k1} + a''_{k2}A_{k2} + \ldots + a''_{kn}A_{kn} = \Delta' + \Delta''\end{aligned}$$

(от (3.24)); или

$$\begin{aligned}\Delta &= \sum_{\alpha \in P_n} (-1)^{[\alpha]} a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \ldots a_{k-1,\alpha_{k-1}} (a'_{k\alpha_k} + a''_{k\alpha_k}) a_{k+1,\alpha_{k+1}} \ldots a_{n,\alpha_n} = \\ &= \sum_{\alpha \in P_n} (-1)^{[\alpha]} a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \ldots a'_{k,\alpha_k} \ldots a_{n,\alpha_n} + \sum_{\alpha \in P_n} (-1)^{[\alpha]} a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \ldots a''_{k,\alpha_k} \ldots a_{n,\alpha_n} = \Delta' + \Delta''\end{aligned}$$

(от (3.4)).

8) *Една детерминанта не променя стойността си, ако към даден ред (стълб) прибавим друг, умножен по число.*

Наистина, ако например *l*-тия ред на дадена детерминанта $\Delta = \det(a_{ij})$ умножим (поелементно) по произволно число **c**, след което така получения вектор-ред прибавим (поелементно) към *k*-тия ред на Δ, ще получим нова детерминанта *D,* чиито *k*-ти ред се състои от елементите $a_{kj} + c a_{l,j}$, $j = 1 \div n$. Останалите редове на О, различни от *k*-тия, са идентични със съответните редове на Δ. Тогава от свойство 7) имаме, че $D = D' + D''$, където *k*-тите редове на D' и D'' се състоят съответно от a_{kj} и $c a_{lj}$, $j = 1 \div n$. Следователно $D' = \Delta$, а $D" = c\Delta^0$ (по свойство 6)), като Δ^0 е детерминантата, чиито *k*-ти ред е еднакъв с *l*-тия й, тогава (по свойство 3)) $\Delta^0 = 0$. Т.е. $D = \Delta + 0 = \Delta$. Разсъжденията по стълбове са аналогични.