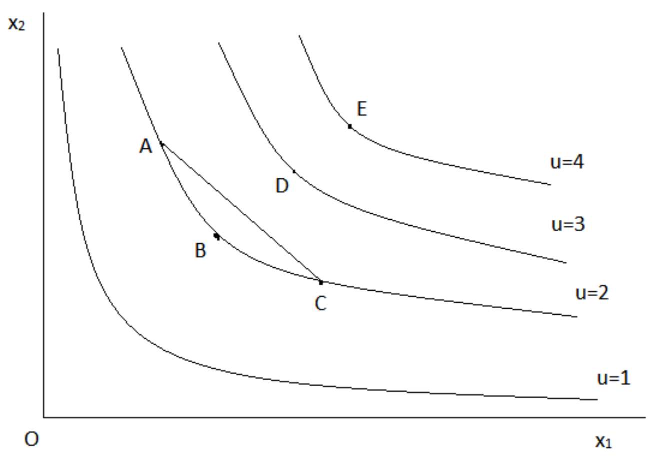
4. Теория за поведението на потребителя

Функции на полезност. За разлика от поведението на производителите, чиято единствена цел е да получат максимална печалба, поведението и мотивацията на потребителя не са толкова прости. Всеки един индивид има своите предпочитания към или измежду широка гама от стоки и няма очевиден начин да се изрази формално неговото желание. Затова ние ще приемем един математически подход, който има целта да моделира поведението на потребителя, който се опитва да удовлетвори многомерните си желания.
Да допуснем, че един типичен потребител, поставен пред избора колко да потреби от n различни стоки, има предпочитания, които могат да бъдат изразени чрез функцията на полезност:

$$U(x) = U(x_1, x_2, ..., x_n), \tag{1}$$

където $x_1, x_2, ..., x_n$ са броят на единиците, които потребителя иска да купи съответно от първата, втората,...,n-тата стока. Ако случайно две стоки имат една и съша стойност на полезност, то потребителят е безразличен в предпочитанието си към всяка една от тях.
Ако $n = 2$, тогава можем да представим функцията на полезност във вид на графикана кривата на безразличие:



фиг.14

Контурите на $U(x)$ представляват различните "пакети" от стоки, които имат еднаква полезност. те се наричат линнии на безразличие. В т.A, т.B и т.C полезноста е една и съща, докато в т.D и т.E полезноста е по-висока.
Сега щя изкажем някои свойства на $U(x)$: 1) $U(kx) > U(x)$ за $k > 1$, т.е. потребителят предпочита повече пред по-малко стоки, така че кривите на безразличието, които са по-далече от началото на координатната система, показват по-голяма полезност; 2) $U(x)$ е вдлъбната, т.е. ако за някое ниво на полезност $U(x_1, x_2) = u$ имаме

$$\left(\frac{dx_2}{dx_1}\right) = -\frac{U_1}{U_2}. \tag{2}$$

$\frac{U_1}{U_2}$ се нарича потребителска маргинална норма на заместване. От свойство 2) следва, че функцията на полезност има свойството маргиналната норма на заместване да намалява:

$$\frac{U_1/U_2}{x_1/x_2} \leq 0. \tag{3}$$

Маргиналната норма измерва количеството x_2, от което потребителят се нуждае, за да компенсира загубата на единица стока от x_1. Съответно очакваме, с нарастването на отношението x_1/x_2, маргиналната норма да намаля своята стойност.

Максимализиране на полезността и функции на търсенето. Да разгледаме проблма за максимализирането на полезноста, ако потребителя разполага с паричен доход m, предназначен за закупуване на стоки.
Нека векторът $p(p_1, p_2, ..., p_n)$ представя цените на съответните стоки. Тогава трябва да е изпълнено следното неравенство:

$$\begin{gathered} p_1x_1 + p_2x_2 + ... + p_nx_n \leq m \text{ или} \\ \mathbf{px} \leq m. \end{gathered} \tag{4}$$

Ще приемем също така, че потребителят не може да промени нито цените $\mathbf{p}$, нито дохода m.
Свойството 1) показва, че потребителя ще похарчи целия си приход, т.е.

$$\mathbf{px} = m. \tag{5}$$

Така можем да приложим метода на Лагранж за оптимизация, т.е.

$$max_{x,\lambda}\{L(x,\lambda) = U(x) + \lambda(m - p_1x_1 - p_2x_2 - ... - p_nx_n)\}. \tag{6}$$

Условията за максимум са

$$\begin{gathered} \frac{\partial U}{\partial x_i} = \lambda p_i \text{ ,за i=1,2,...,n} \\ m = p_1x_1 + p_2x_2 + ... + p_nx_n \end{gathered} \tag{7}$$

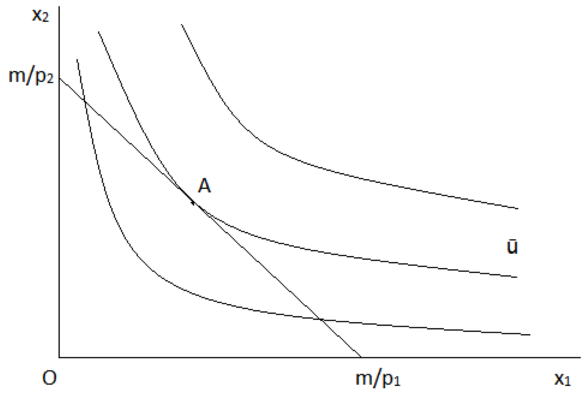
Така $x = x(p, m)$ и $\lambda = \lambda(p, m)$

$$\lambda = \frac{\partial U}{\partial x_i}\frac{1}{p_i} \text{ i=1,2,...,n} \tag{8}$$

Това е маргиналната потребителска полезност.
При максимално ниво полезност не е възможно

$$\frac{\partial U}{\partial x_j}\frac{1}{p_j} < \frac{\partial U}{\partial x_k}\frac{1}{p_k}, \tag{9}$$

така, че потребителят може да повиши полезноста си чрез пренасочване на пари от стоката j към стоката k. В случая на две стоки, това може да се покаже и графично:



фиг.15

При дадени m, p_1, p_2 придвижваме нивото на полезност до ū, така че то да се допира правата px=m в т..
Примери:
1) Нека $U(x_1, x_2) = x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha}$, където $\alpha \in (0,1)$ и да максимализираме полезноста

$$\max_{x_1,x_2,\lambda}\{L(x,\lambda) = x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha} + \lambda(m - p_1x_1 - p_2x_2)\} \tag{10}$$

Условията са

$$\begin{gathered} \lambda x_1^{\alpha-1} x_2^{1-\alpha} = \lambda p_1 \\ (1-\alpha) x_1^{\alpha} x_2^{-\alpha} = \lambda p_2 \\ m = p_1x_1 + p_2x_2 \end{gathered} \tag{11}$$

или

$$\begin{gathered} \alpha \tfrac{U}{x_1} = \lambda p_1 \\ (1-\alpha)\tfrac{U}{x_2} = \lambda p_2 \\ m = p_1x_1 + p_2x_2. \end{gathered} \tag{12}$$

Така получихме $x_1(p,m) = \frac{\alpha m}{p_1}$ и $x_2(p,m) = \frac{(1-\alpha)m}{p_2}$. Тези функции се наричат функции на потребителското търсене.
2) Нека $U(x_1, x_2) = x_1^{1/2} + x_2^{1/2}$ и отново да максимализираме полезноста:

$$max_{x_1,x_2,\lambda}\{L(x,\lambda) = x_1^{1/2} + x_2^{1/2} + \lambda((m - p_1x_1 - p_2x_2)\}. \tag{13}$$

От

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}x_1^{-1/2} &= p_1x_1\\ \tfrac{1}{2}x_2^{-1/2} &= p_2x_2\\ m &= p_1x_1 + p_2x_2\end{aligned} \tag{14}$$

получаваме $\sqrt{\frac{x_2}{x_1}} = \frac{p_1}{p_2}$ и съответно $x_2 = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^2 x_1$. Освен това получаваме и $x_1(p, m) = \frac{p_2 m}{p_1(p_1+p_2)}$ и $x_2(p, m) = \frac{p_1 m}{p_2(p_1+p_2)}$.

Минимализиране на разноските и конпенсирани функции на търсенето. Да разгледаме проблема за минимализиране на разноските на даден портребител, необходими за достигане на определена крива на безразличие. Формално това можем да го запишем така:

$$\min_{\mathbf{x}}\{\mathbf{px}, U(x) = u\} \text{ ,където u е фиксирано.} \tag{15}$$

Отново ще използваме метода на Лагранж:

$$\min_{\mathbf{x},\mu}\{L(\mathbf{x}, \mu) = \mathbf{xp} + \mu(u - U(x))\}. \tag{16}$$

Съответно условията за минимум са:

$$\begin{aligned}p_i &= \mu\frac{\partial U}{\partial x_i} \text{ ,i=1,2,...,n}\\ U(x) &= x.\end{aligned} \tag{17}$$

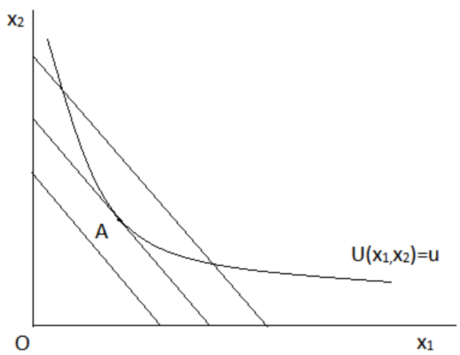
От последното можем да намерим $x_i = x_i(\mathbf{p}, u), i = 1, 2, ..., n$, които се наричат компенсирани функции на търсенето.
Аналогично на функцията на фирмените разходи, функцията на разноските на потребителитя се дефинира чрез

$$e(\mathbf{p}, u) = \mathbf{px}(\mathbf{p}, u), \tag{18}$$

т.е.

$$e(\mathbf{p}, u) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i(\mathbf{p}, u). \tag{19}$$

Нека отново разгледаме случая, когато потребителя избира между две стоки:



фиг.16

На фиг.16. нивата на разноските $p_1x_1 + p_2x_2$ са представени чрез успоредни линии, като по-ниските разноски са по-близо до началото на кординатната система. Най-ниското ниво на разноските, отговарящо на u, съответства на бюджетната линия, която е допирателна към кривата на безразличието в т.A.
Нека сега разгледаме едно интересно свойство на функцията н арзноските. Нека разгледаме случая, когато p_i се променя и да изследваме $x(\mathbf{p}, u)$ и $e(\mathbf{p}, u)$.
От (19) получаваме

$$\frac{\partial e(\mathbf{p},u)}{\partial p_i} = x_i + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x_j}{\partial p_i} = x_i(\mathbf{p}, u) + \mu \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial U}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial p_i}, \tag{20}$$

но $U(x) = x$, следователно $\frac{\partial U}{\partial x_j} = 0$, $j = 1, 2, ..., n$ и получаваме

$$\frac{\partial e(\mathbf{p}, u)}{\partial p_i} = x_i(\mathbf{p}, u), \tag{21}$$

т.е. производната на функцията на разноските по отношение на цената на една стока се равнява на търсенето количество от тази стока.
Ако x_i не бяха функции на цените, а вместо това бяха константи, тогава (21) очевидно щеше да е вярно, тъй като $e = \sum_{j=1}^{n} p_j x_j$. Но всяко x_j зависи от цените, включително p_i, така че имаме n на брой влияния p_i върху e. Така показахме, че сборът на всички странични влияния винаги трябва да бъде равен на нула.
Друг резултат от направените разсъждения, е че

$$\frac{\partial x_i(\mathbf{p}, u)}{\partial p_j} = \frac{\partial x_j(\mathbf{p}, u)}{\partial x_i}, \tag{22}$$

което следва от

$$\frac{\partial^2 e(\mathbf{p}, u)}{\partial p_i \partial p_j} = \frac{\partial^2 e(\mathbf{p}, u)}{\partial p_j \partial p_i} \tag{23}$$

и от (21).
Нека сега разгледаме следния пример:

$$U(x) = x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha}, \text{ където } \alpha \in (0, 1). \tag{24}$$

За компенсираните функции на търсенето имаме $x_1(p_1, p_2, u) = \left(\frac{\alpha}{1-\alpha} \frac{p_2}{p_1}\right)^{1-\alpha} u$ и $x_1(p_1, p_2, u) = \left(\frac{1-\alpha}{\alpha} \frac{p_1}{p_2}\right)^{\alpha} u$, където $U(x) = u$. За функцията на разноските получаваме

$$e(p_1, p_2, u) = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\alpha} \left(\frac{p_2}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha} u \tag{25}$$